Е. В. АКСЁНОВ
М. Я. ПРАТУСЕВИЧ

Углублённое изучение ГЕОМЕТРИИ в 11 классе

К. Н. АКСЁНОВ
М. Я. ПРАТУСЕВИЧ

Углублённое изучение ГЕОМЕТРИИ в 11 КЛАССЕ

Методические рекомендации к учебнику А. Д. Александрова, А. Л. Вернера, В. И. Рыжика

Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

2-е издание

Москва
«Просвещение»
2017

УДК 16+
ББК
А

Аксёнов К. Н., Пратусевич М. Я.

А Углублённое изучение геометрии в 11 классе. Методические рекомендации к учебнику А. Д. Александрова, А. Л. Вернера, В. И. Рыжика : учеб. пособие для общеобразоват. организаций. — 2-е изд. — М. : Просвещение, 2017. — 220 с. — ISBN 978-5-09-043038-8.

Книга предназначена для учителей, работающих в классах с углублённым изучением математики по учебнику А. Д. Александрова и др. «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 11 класс». В ней представлены основные идеи школьной геометрии и особенности её изложения в упомянутом учебнике.

УДК
ББК

Учебное издание

Аксёнов Константин Николаевич
Пратусевич Максим Яковлевич

Углублённое изучение геометрии в 11 классе
Методические рекомендации
к учебнику А. Д. Александрова, А. Л. Вернера, В. И. Рыжика

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*. Редакторы *Н. Б. Грызлова*, *И. В. Рекман*. Младший редактор *Е. А. Андреенкова*. Художественный редактор *О. П. Богомолова*. Компьютерная графика *К. В. Кургелен*, *А. Г. Вьюниковской*. Корректор *Л. А. Асанова*

ISBN 978-5-09-043038-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

В главах учебника «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 11 класс» прослеживается курс на единство наглядности и логики, соблюдается математическая строгость в рассуждениях, большое внимание уделяется развитию пространственных представлений, повышению уровня пространственного мышления и вообще воспитанию мышления ученика.

Теоретический материал 11 класса — это, с одной стороны, различные обобщения и применение изученного в 10 классе материала: взаимные расположения точек и прямых при изучении многогранников, расстояния и углы как при изучении многогранников, так и при вычислении объёмов, и т. д.

С другой стороны, появляются новые разделы, изучающие не столько геометрические тела как множества точек пространства, сколько объекты более сложной природы: векторы, преобразования пространства. Изучение этих тем в сочетании с аналитическим методом даёт возможность решать новые классы задач, а также существенно упрощать решения задач уже известных видов. Вместе с тем изучение указанных тем (даже в ознакомительном плане) значительно повышает общий уровень культуры учащихся, приближает их к современным воззрениям на предмет и методы изучения математики.

Отметим некоторые особенности учебника.

1. Материал 11 класса условно можно разделить на две части. Главы V—VII более традиционны. Задачи на материал этих глав обычно используются на всевозможных экзаменах. Главы VIII и IX менее традиционны и менее связаны с другими главами.

Этот материал появлялся и в других школьных учебниках, но там акцент делался на его применении в решении простых задач, в то время как многие теоретические положения не сообщались или не доказывались. Здесь же эти темы разбираются в русле общих требований к уровню строгости, принятых в данном учебнике.

2. Материал глав VIII и IX должен был бы служить обобщением соответствующих разделов планиметрии. Но, в связи с тем что в классы с углублённым изучением математики часто поступают лишь после 10 класса, а также из-за резкого сокращения соответствующего материала, в курсе геометрии возможностей для обобщения меньше. Однако при наличии времени учитель может сначала разобрать соответствующие теоремы и задачи для плоскости, а потом обобщить (хотя бы путём проверки аналогичных утверждений) для пространства.

3. Материал § 29 «Представление объёма интегралом» приходится излагать с отступлением от принятого в учебнике уровня строгости, поскольку в школьном курсе математического анализа определённый интеграл излагается в основном на интуитивном уровне. В то же время

наличие теорем о представлении объёма интегралом облегчает вывод многих формул и решение задач.

Как показывает практика, из-за недостаточного уровня владения понятием «функция» ученики с трудом усваивают § 28 «Объём прямого цилиндра» и некоторые другие вопросы главы IX. Поэтому в эту главу включён материал об отображениях пространства, а также ряд задач на общие свойства отображений. При недостатке времени (либо при недостаточном уровне подготовки класса) можно ограничиться лекционным изложением или семинаром по усвоению понятия «функция».

В учебнике достаточно много пока ещё непривычных для российской школы задач. Их формулировки дают простор для фантазии ребёнка, однако множество возможных ответов на эти задачи зачастую бесконечно. Поэтому в данном пособии, как правило, приведён лишь один из возможных ответов, но это не означает, что он является единственно верным. Следует также обратить внимание на то, что в учебнике есть ряд задач с противоречивым или недостаточным для единственности либо конечности ответа условием. Такие задачи, равно как и задачи, точное и полное решение которых представляет значительную трудность, авторы постарались отметить. Поэтому нужно относиться внимательно и осторожно к решениям, в которых встречаются слова «очевидно» или «ясно, что». Иногда это означает, что авторы прибегли к геометрической интуиции и не провели строгого доказательства.

Кроме того, в решениях многих задач (в основном многопунктных и технических) освещались лишь некоторые пункты решения, представляющие, по мнению авторов, геометрический интерес. Отдельные простые задачи, предназначенные в основном для устной работы либо полностью аналогичные уже разобранным, не рассматривались.

Определения и обозначения стереометрических объектов соответствуют принятым в учебниках «Геометрия. 10 класс» и «Геометрия. 11 класс» А. Д. Александрова и др.

Условия задач в пособии не приводятся. Обозначения в решениях такие же, как и в условиях задач из названных учебников.

Укажем ещё на некоторые условности в обозначениях, применяемых в пособии.

В решениях подробные тождественные преобразования опускаются. Формулы стандартных отрезков и величины стандартных углов плоских фигур (например, радиус вписанной окружности правильного многоугольника через его сторону) предполагаются известными. Решённой считается задача, сведённая к планиметрической.

Всюду, где не оговорено противное, параллелограмм подразумевается частным случаем трапеции. Совпадающие прямые считаются частным случаем параллельных.

В пособии приняты следующие правила наименования прямоугольных и равнобедренных треугольников. Вершины прямоугольного треугольника перечисляются в таком порядке, что вершина прямого угла называется второй. Например, фраза «прямоугольный треугольник ABC» означает, что угол ABC равен 90°. Равнобедренный треугольник именуется так, что его вершина называется второй. Например, фраза «равнобедренный треугольник ABC» означает, что $|AB| = |BC|$.

Кроме того, по отношению к равнобедренному треугольнику термин «боковая высота» применяется для обозначения высоты, проведённой на боковую сторону треугольника.

Углами между гранями многогранников, если не оговорено противное, считаются углы между плоскостями этих граней.

Всюду, где не оговорено противное, под проекциями рёбер многогранников подразумеваются проекции прямых, содержащих эти рёбра.

Если в задаче требуется найти угол, ответом служит, как правило, тригонометрическая функция этого угла, в сочетании со смыслом задачи однозначно определяющая этот угол. Например, если требуется найти угол между прямой и плоскостью, который по определению не тупой, то такой функцией может служить синус.

В пособии используется следующая формулировка теоремы о трёх перпендикулярах (см.: «Геометрия. 10 класс», задача **7.1**): проекция прямой на плоскость перпендикулярна прямой в этой плоскости вместе и только вместе с самой проектируемой прямой. В данной формулировке не требуется прохождения всех указанных прямых через одну точку.

Часто используется факт, называемый «неравенство треугольника для трёхгранного угла»: в трёхгранном угле сумма величин его плоских углов, кроме одного, больше величины оставшегося угла (см.: «Геометрия. 10 класс», задача **14.55**).

Кроме того, без доказательства используются теоремы косинусов и синусов для трёхгранного угла (см.: «Геометрия. 10 класс», § 14, формулы 14.3, 14.5, 14.7), при этом всюду, где не оговорено противное, плоские углы трёхгранного угла обозначаются строчными греческими буквами (α, β, γ), а противолежащие им двугранные углы — прописными латинскими буквами (A, B, C). Сам трёхгранный угол обозначается четырьмя буквами, первая из которых обозначает вершину, а остальные три поставлены по одной на рёбрах.

В решении задач на интуитивном уровне используются понятия симметрии различных типов и гомотетии в пространстве. По мнению авторов, это согласуется с принятым в учебнике уровнем строгости.

Авторы выражают благодарность **Паповскому Вилену Михайловичу** за помощь, оказанную им при работе над этим пособием.

Данный УМК состоит из учебника, методических рекомендаций (данное пособие), дидактических материалов и электронной формы учебника. Дидактические материалы содержат самостоятельные и контрольные работы для учащихся в двух вариантах. Методические рекомендации и дидактические материалы размещены на сайте издательства «Просвещение» (www.prosv.ru) в разделе «Методическая помощь».

Электронная форма учебника (ЭФУ) соответствует по структуре, содержанию и художественному оформлению печатной форме учебника, включает в себя интерактивные ссылки, расширяющие и дополняющие материал печатного учебника.

Функциональные особенности ЭФУ:

- удобный и понятный интерфейс и навигация по ЭФУ;
- работа в онлайн- и офлайн-режимах;
- тестовые задания к каждой теме, разделу учебника;
- возможность добавления материалов, созданных учителем;
- инструменты изменения размера шрифта, создания заметок и закладок;
- удобная навигация.

Педагогические возможности использования ЭФУ:

- организация контроля и самоконтроля по результатам изучения темы;
- реализация технологий мобильного, дистанционного или смешанного обучения;
- реализация требований ФГОС по формированию информационно-образовательной среды системой электронных образовательных ресурсов и др.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ГЛАВА V. МНОГОГРАННИКИ

Тема «Многогранники» является центральной в курсе геометрии старших классов. Практически весь ранее пройденный материал (в том числе материал планиметрии) задействован в этой теме. В свою очередь, многогранники являются объектом дальнейшего исследования почти во всех впоследствии изучаемых темах.

Изложение этой темы занимало авторов учебника задолго до его появления. Основополагающей здесь является статья академика А. Д. Александрова «Что такое многогранник?» (Математика в школе. — 1981. — № 1, 2). В ней дан критический анализ прежних способов введения этого понятия, рассматриваются различные аспекты понятия «многогранник» и общие принципы изложения не только данной темы, но и геометрии вообще. Учителю необходимо прочесть эту статью, послужившую основой для написания главы V учебника. С другим изложением можно ознакомиться, например, в книге В. Г. Болтянского «Элементарная геометрия» (М.: Просвещение, 1985. — Гл. V). Интересные обсуждения понятия многогранника имеются в книге И. Лакатоса «Доказательства и опровержения» (М.: Наука, 1967), которая является заметной вехой в логике, математике и методике геометрии.

§ 21. Многогранник и его элементы

Ясно видны две последовательности изложения темы.

1. Обобщить понятие многоугольника, например, как это сделано в пункте 21.2. По этому вопросу полезным может оказаться обсуждение понятия «многоугольная фигура» в главе VIII книги А. Д. Александрова «Основания геометрии» (М.: Наука, 1987) или в § 2 статьи В. А. Рохлина «Площадь и объём» (Энциклопедия элементарной математики. — М.: Наука, 1966. — Т. V).

2. Испобзуя § 21 учебника, дать сначала (можно после некоторого общения с учениками) определение многогранника. Здесь же показать модели тел, которые мы интуитивно относим к многогранникам, их грани не являются многоугольниками в смысле ранее принятого определения. Для разрешения проблемы обобщить понятие многоугольника. Обсуждение этого обобщения проясняет и определение многогранника.

Однако при любом способе изложения необходимо повторить определение и смысл понятий, входящих в определение многогранника: тело, многоугольник, поверхность и др.

Пункт 21.3 можно дать для самостоятельного прочтения с последующим проведением семинара. При подготовке к семинару можно использовать § 5 и 9 из статьи А. Д. Александрова «Что такое многогранник?».

Задачи к § 21

21.1. а) Такими многогранниками являются, например, куб или усечённый тетраэдр, а также многие другие многогранники; б) примером такого многогранника может служить правильная четырёхугольная усечённая пирамида; в) здесь примером послужит прямая призма с ромбом в основании; г) например, две наклонные призмы, склеенные по общему основанию.

З а м е ч а н и е. Допускается, что у этих многогранников могут быть и другие виды сечений, кроме перечисленных в задаче.

21.2. а) Правильный тетраэдр; б) прямая призма; в) параллелепипед; г) правильная усечённая пирамида.

21.3. а) Два тетраэдра с общим основанием; б) интересно показать, что выпуклого такого многогранника не существует (так как в каждой вершине выпуклого многогранника сойдутся ровно три грани); невыпуклый такой многогранник — это куб, к каждой грани которого приклеен такой же куб; в) неправильная усечённая пирамида; г) додекаэдр; д) тетраэдр, вершины которого усечены.

21.5. Ответ на рисунке 1.

21.7. Для тетраэдра длины швов одинаковы.

21.11. Нет (примером могут служить два кольцеобразных многоугольника на плоскости и многогранника в пространстве).

21.12. Нет.

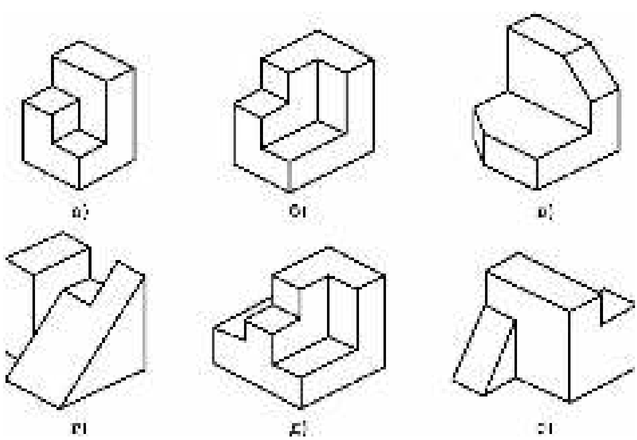

Рис. 1

21.13. Сечение сферы плоскостью грани есть окружность, в которую эта грань вписана. Обратное неверно (можно пошевелить вершину правильного икосаэдра, все грани которого — треугольники, убрав её с описанной сферы).

21.14. Пусть выпуклый многогранник имеет вершину, из которой выходят ровно три ребра. Отсекая эту вершину плоскостью, мы увеличиваем число рёбер на 3, причём из каждой новой вершины выходит по три ребра. Искомые многогранники получатся многократным применением этой операции к тетраэдру (так получатся многогранники, число рёбер которых кратно 3), четырёхугольной пирамиде (так получатся многогранники, число рёбер которых даёт остаток 2 при делении на 3), пятиугольной пирамиде (так получатся многогранники, число рёбер которых даёт остаток 1 при делении на 3). Многогранника с числом рёбер, меньшим шести, не существует, так как из каждой вершины выходит не менее трёх рёбер, а вершин в многограннике хотя бы четыре. Ровно шесть рёбер есть у тетраэдра. Многогранника ровно с семью рёбрами не существует (у него не может быть пять или более вершин, так как тогда количество концов рёбер хотя бы 15. Но у многогранника с четырьмя вершинами не может быть больше шести рёбер, так как 6 — это количество отрезков с концами в данных четырёх точках).

21.15. В многограннике количество граней с нечётным числом сторон чётно. Действительно, суммарное количество сторон во всех гранях — чётное число, ибо оно равно удвоенному количеству рёбер многогранника (каждое ребро принадлежит двум граням и считается в указанной сумме 2 раза).

21.16. В многограннике количество вершин, из которых выходит нечётное число рёбер, чётно. Действительно, сумма количеств рёбер, выходящих из всех вершин, равна удвоенному количеству рёбер многогранника (так как у каждого ребра два конца), следовательно, чётна. Другой подход к доказательству этого утверждения для выпуклых многогранников состоит в рассмотрении двойственного многогранника (вершины которого соответствуют граням исходного и соединены ребром, если соответствующие грани имеют общее ребро). Однако доказать существование такого многогранника для любого исходного многогранника сложно.

§ 22. Призмы

Обратим внимание на некоторые особенности изучения этого параграфа:

1) На рисунке 22, *а* учебника изображён многогранник, который в других учебниках не считается призмой.

2) В п. 22.1 фактически доказывается теорема о равносильности двух определений призмы. Представляется полезным явно сформулировать эту теорему и тщательно записать доказательство (в каждой из частей сформулировать, что дано и что надо доказать).

3) В п. 22.1 много говорится о разных соответствиях. Однако если в определении призмы фраза «соответственные стороны равны» ясна из определения равенства фигур, то утверждение «отрезки, соединяющие соответствующие точки оснований призмы, параллельны» требует пояснения. Важно подчеркнуть, что, зная про равенство оснований, мы не знаем, какое соответствие между ними установлено этим равенством.

4) Следует иметь в виду, что определение параллелепипеда, данное в 10 классе, равносильно тому, которое дано сейчас.

Задачи к § 22

22.2. Эта задача даёт возможность дополнительно отработать следующие вопросы:

а) Почему упоминаются продолжения боковых рёбер?

б) Что значат слова «получится многоугольник»?

в) Чем интересно перпендикулярное сечение призмы?

г) Каким рёбрам и граням перпендикулярно перпендикулярное сечение призмы?

д) Чем являются стороны перпендикулярного сечения для боковых граней?

Понятие перпендикулярного сечения встречается в задачах **22.4**, **22.7** и др.

22.5. Рассмотрим сечение параллелепипеда ACC_1A_1. Эта плоскость пересекает стороны сечений DB и D_1B_1 в их серединах. С другой стороны, указанная плоскость содержит диагональ AC_1. Поэтому точки пересечения указанных сечений с AC_1 лежат на медианах треугольников A_1BD и CD_1B_1, проведённых из вершин A_1 и C соответственно. Аналогичным рассмотрением сечений AB_1C_1D и AD_1C_1B убеждаемся, что точки пересечения исходных сечений с AC_1 лежат и на остальных медианах. Значит, сечения DBA_1 и D_1B_1C встречают AC_1 в своих точках пересечения медиан M_1 и M_2 соответственно.

Конечно, для доказательства достаточно рассмотрения лишь двух диагональных сечений параллелепипеда. Но любопытно отметить, что нами получено доказательство того, что медианы треугольника пересекаются в одной точке. Для его завершения достаточно лишь показать, что для любого треугольника существует параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого сечение A_1BD было бы треугольником, равным данному, что очевидно.

Для доказательства того, что точки M_1 и M_2 делят AC_1 на три равные части, достаточно вновь рассмотреть сечение AA_1C_1C и доказать, что в параллелограмме непересекающиеся отрезки, соединяющие противоположные вершины с серединами противоположных сторон, делят диагональ, не проходящую через исходные вершины, на три равные части. Это легко увидеть, например, из того, что M_1 есть точка пересечения медиан треугольника $AA_1C,$ а потому $|AM_1| = 2\,|M_1O|$, причём $|AO| =$ $= \dfrac{1}{2}\,|AC_1|,$ откуда и следует требуемое.

22.6. Количество таких параллелепипедов равно количеству четвёрок вершин данного параллелепипеда, не лежащих в одной плоскости. Это количество может быть подсчитано так: из общего количества четвёрок вершин параллелепипеда C_8^4 вычесть количество четвёрок, лежащих в одной плоскости. Таких четвёрок 12 (6 граней и 6 диагональных сечений). О т в е т: 58.

22.7. Прежде всего отметим, что квадратом может быть грань, на которой лежат гипотенузы оснований (рис. 2, *а*), или грань, опирающаяся на катеты (рис. 2, *б*). В последнем случае призма не может быть прямой. В соответствии с этим план решения будет разделяться на два подслучая в каждом пункте.

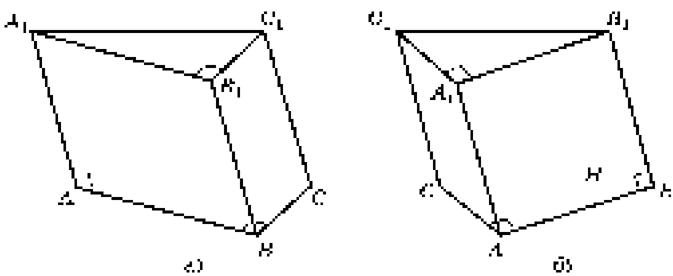

Рис. 2

а) Так как боковые рёбра призмы параллельны, то искомый угол равен углу между боковым ребром и ребром основания в грани призмы. Этот угол может быть равен 90°, если упомянутое в условии ребро основания есть сторона квадрата.

Если квадратная грань ABB_1A_1 опирается на катет AB прямоугольного треугольника ABC, то высота B_1H падает на ребро BC или его продолжение. В этом случае из прямоугольного треугольника BHB_1 находим синус искомого угла.

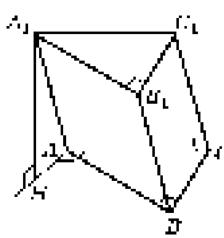

Рис. 3

Пусть квадратная грань ACC_1A_1 опирается на гипотенузу AC (рис. 3). Тогда рассмотрим прямоугольный треугольник $AA_1H,$ где H — проекция A_1 на плоскость $ABC.$ Из этого треугольника найдём длину AH, а также заметим, что $\angle BAH = 135°$, так как $AH \perp AC.$ Пусть A_1H_1 — перпендикуляр к AB в плоскости грани ABB_1A_1. Тогда треугольник AHH_1

прямоугольный равнобедренный, поэтому можно найти $|AH_1|$. После этого находим из прямоугольного треугольника AA_1H_1 косинус искомого угла.

б) В случае если квадратная грань опирается на катет основания, искомый угол есть угол, найденный в п. «а». В противном случае синус искомого угла находится из прямоугольного треугольника A_1HA (с учётом найденного в п. «а»).

в) В случае если квадратная грань опирается на катет основания, перпендикуляр CH_1 на грань AA_1B_1B, опущенный из вершины C, падает на ребро BB_1 или его продолжение. Зная найденный в п. «а» угол B_1BC, можно найти длины отрезков CH_1 и BH_1 из прямоугольного треугольника CH_1B, после чего найти длину AH_1 по теореме Пифагора в треугольнике ABH_1. Теперь из треугольника ACH_1, в котором нам известны все стороны, найдём угол CAH_1, равный искомому.

В другом случае ребро AC просто лежит в квадратной грани, т. е. искомый угол равен 0°.

г) В случае когда квадратная грань опирается на катет основания, величина искомого угла равна величине угла B_1BC, найденной в п. «а».

В другом случае этот угол измеряется углом HAA_1, который находится из прямоугольного треугольника AHA_1.

д) Проведём перпендикулярное сечение CH_1H_2 призмы через вершину C. Углы треугольника этого сечения и будут линейными углами искомых двугранных углов. Если квадратная грань призмы ABB_1A_1 опирается на катет AB основания, то одна из сторон поперечного сечения равна AB (так как $AB \perp (CBB_1)$). Другая его сторона CH_1 найдена в п. «в».

Заметим, что $BH_1 = CH_2$. Длина $|BH_1|$ найдена в п. «в», длину $|CH_2|$ можно найти из прямоугольного треугольника CH_2A. Из треугольника CH_1H_2 с известными теперь сторонами находим искомые углы.

Решение остаётся почти таким же и в случае квадратной грани, опирающейся на гипотенузу основания. Разница лишь в том, что перпендикулярное сечение призмы, проведённое через вершину C, содержит ребро AC основания. Вычисление остальных сторон перпендикулярного сечения ACH производится из прямоугольных треугольников AHB и CHB, острые углы которых ($\angle ABH$ и $\angle CBH$) найдены в п. «а».

22.8. Заметим прежде всего, что $BB_1 \perp A_1C_1$. Это следует из того, что BB_1, составляя равные углы с A_1B_1 и B_1C_1, проектируется на плоскость $A_1B_1C_1$ в биссектрису угла $A_1B_1C_1$. Так как треугольник $A_1B_1C_1$ равнобедренный, то указанная биссектриса перпендикулярна A_1C_1, а тогда по теореме о трёх перпендикулярах $BB_1 \perp A_1C_1$.

Проведём в грани BB_1C_1C перпендикуляр C_1H из точки C_1 на ребро BB_1 (рис. 4). Плоскость HC_1A_1 проходит через две прямые, перпендикулярные BB_1, а потому является перпендикулярным сечением призмы. Из прямоугольного треугольника C_1HB_1 получим $|C_1H| = 3 \sin \varphi$.

Итак, перпендикулярное сечение призмы есть равнобедренный треугольник C_1HA_1 с боковыми сторонами $|C_1H| = |A_1H| = 3\sin\varphi$ и основанием $|A_1C_1| = 4$. Значит, периметр сечения $P = 6\sin\varphi + 4$ и его площадь $S = 2\sqrt{9\sin^2\varphi - 4}$.

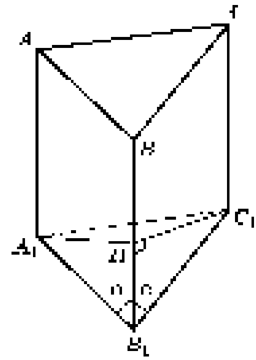

Рис. 4

К этому решению можно сделать следующие примечания:

1) Условие о том, что грань AA_1C_1C — прямоугольник, излишне, так как следует из остальных данных задачи. В решении показано, что боковое ребро призмы перпендикулярно A_1C_1 и без этого условия.

2) Так как в ответе получили $\sqrt{9\sin^2\varphi - 4}$, возникает вопрос о существовании этого выражения. Заметим, что из «неравенства треугольника» для трёхгранного угла с вершиной B_1 имеем $2\varphi > \angle A_1B_1C_1$. Отсюда $\varphi > \arcsin\frac{2}{3}$. Тогда указанное выражение существует, если существует конфигурация, данная в условии задачи.

З а м е ч а н и е. Задача допускает по крайней мере три способа решения.

1. После построения (приведённое решение).

2. С использованием теоремы косинусов для трёхгранного угла с вершиной B.

3. С использованием задачи-теоремы о площади проекции.

Все способы решений стимулируют повторение материала 10 класса и демонстрируют необходимость его изучения.

22.9. а) Проще всего решить эту задачу, пользуясь теоремой о том, что площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна площади исходного многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью этого многоугольника и плоскостью проекций (см.: «Геометрия. 10 класс», задача **14.6).**

Найдём площадь треугольника BC_1D. Его сторонами являются диагонали граней параллелепипеда. Их длины равны $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$. Площадь треугольника с данными сторонами можно вычислить по формуле Герона. При этом в данном случае удобно пользоваться такой формулой: $S = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}$. Итак, $S_{\triangle BC_1D} = \frac{7}{2}$. Тогда $\cos\angle((BC_1D);\ (BCD)) = \frac{6}{7}$, $\cos\angle((BC_1D);\ (BCC_1)) = \frac{S_{\triangle C_1CB}}{S_{\triangle BC_1D}} =$

$= \dfrac{3}{7}$. Аналогично $\cos\angle((BC_1D);\ (DCC_1)) = \dfrac{2}{7}$.

Отметим, что площадь треугольника BC_1D можно было вычислить из теоремы о том, что в прямоугольном тетраэдре $CBDC_1$ сумма квадратов площадей граней, являющихся прямоугольными треугольниками, равна квадрату площади оставшейся грани.

Другой путь решения данной задачи состоит в стандартном нахождении линейных углов (например, для искомого угла при ребре C_1B линейный угол будет углом между перпендикуляром из вершины C на BC_1 и высотой из вершины D в треугольнике BC_1D). Эти перпендикуляры попадут в одну точку на C_1B (по теореме о трёх перпендикулярах) и могут быть вычислены.

«Любимая» ошибка учеников (например, в задаче) — считать линейным углом искомого двугранного угла угол C_1OC, где O — точка пересечения диагоналей $ABCD$.

б) Заметим, что при осевой симметрии относительно оси, соединяющей центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, плоскости B_1AC и D_1AC поменяются местами, а плоскость AA_1C_1 останется на месте. Тогда $\angle((B_1AC);\ (D_1AC)) = 2\angle((B_1AC);\ (AA_1C_1))$ или $\angle((B_1AC);\ (D_1AC))$ будет дополнять $2\angle((B_1AC);\ (AA_1C_1))$ до 180°. Поэтому будем искать $\angle((B_1AC);\ (AA_1C_1))$.

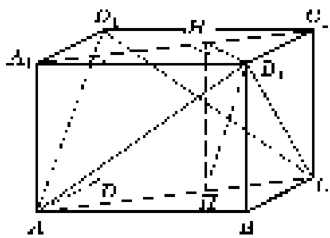

Рис. 5

Проведём перпендикуляр B_1H_1 на A_1C_1 (в плоскости $A_1B_1C_1$) (рис. 5). Заметим, что $B_1H_1 \perp (AA_1C_1)$ как перпендикуляр к ребру угла между перпендикулярными плоскостями, проведённый в одной из этих плоскостей. Пусть H_1H — перпендикуляр из точки H_1 на AC. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $B_1H \perp AC$. Отсюда $\angle B_1HH_1$ — линейный угол искомого двугранного угла. Из прямоугольного треугольника B_1H_1H имеем $\operatorname{tg}\angle B_1HH_1 = \dfrac{|B_1H_1|}{|HH_1|}$. Из прямоугольного треугольника $A_1B_1C_1$, в котором B_1H_1 является высотой, имеем $|B_1H_1| = \dfrac{|A_1B_1|\cdot|B_1C_1|}{|A_1C_1|} = \dfrac{6}{\sqrt{13}}$.

Тогда $\operatorname{tg}\angle B_1HH_1 = \dfrac{6}{\sqrt{13}}$. Так как $\dfrac{6}{\sqrt{13}} > 1$, то $B_1HH_1 > 45°$. Поэтому $\angle((B_1AC);\ (AA_1C_1))$ будет дополнять до 180° угол $2\angle B_1HH_1$. Окончательно имеем $\angle((B_1AC);\ (D_1AC)) = 180° - 2\arccos\dfrac{23}{49}$ (здесь учтено определение угла между плоскостями, который не может быть тупым).

22.10. 1) Прежде всего рассмотрим трёхгранный угол с вершиной A, рёбрами которого являются рёбра параллелепипеда. По условию в этом угле все плоские углы имеют величину 60°. Поэтому все двугранные углы будут равны, их величину можно найти по первой теореме косинусов для трёхгранного угла (см.: «Геометрия. 10 класс», с. 151). Имеем $\widehat{AA_1} = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{3}$. Так как двугранный угол при ребре AA_1 равен двугранному углу при ребре CC_1, то п. «г» оказался решённым с ответом $\cos\varphi = \dfrac{1}{3}$.

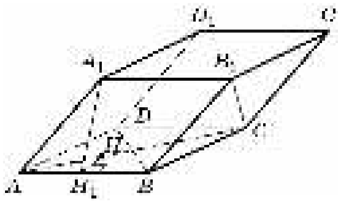

Рис. 6

а) Проведём высоту параллелепипеда A_1H (рис. 6). Опустим перпендикуляр HH_1 из точки H на сторону AB. По теореме о трёх перпендикулярах треугольник AH_1A_1 прямоугольный. Поэтому

$$|A_1H_1| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Заметим, что $\angle A_1H_1H$ есть линейный угол двугранного угла с ребром AB, $\sin\angle A_1H_1H = \dfrac{\sqrt{8}}{3}$. Тогда из прямоугольного треугольника AHH_1 имеем $|AH| = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, а $\sin\varphi = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

З а м е ч а н и е. Рассуждения проведены для трёхгранного угла, у которого все плоские углы равны 60°. Поэтому полученными результатами можно воспользоваться при исследовании, например, правильного тетраэдра. Кроме того, точка H есть центр правильного треугольника ABD (так как лежит на биссектрисе угла A и $|AH| = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$, т. е. радиусу описанной окружности правильного треугольника со стороной 1).

б) В данном параллелепипеде (рис. 7) диагонали A_1C, B_1D и BD_1 образуют тройку взаимно перпендикулярных прямых, так как являются (попарно) диагоналями следующих ромбов: A_1B_1CD, B_1BDD_1 и BCD_1A_1 (в этом рассуждении важно то, что в ромбе с углом 60° меньшая диагональ равна стороне). Таким образом, основание перпендикуляра из точки C на плоскость (BB_1D) есть точка O — центр параллелепипеда. Заметим, что $CO \perp AA_1$, так как плоскость (BB_1D) содержит

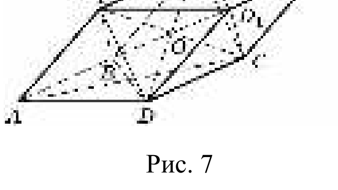

Рис. 7

прямую BB_1, параллельную AA_1. Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник AA_1C и найдём из него $\left|A_1C\right| = \sqrt{2}$. Тогда $|CO| = \frac{|CA_1|}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Искомый угол определим из прямоугольного треугольника COD. Именно: $\sin\varphi = \frac{|CO|}{|CD|} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, откуда $\varphi = 45°$.

Попутно доказано, что ромбы A_1B_1CD, B_1BDD_1 и BCD_1A_1 являются квадратами. Действительно, в прямоугольном треугольнике COD гипотенуза $|CD| = 1$, а катет $|CO| = \sqrt{\frac{1}{2}}$, откуда $|DO| = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Отрезки DO и CO являются половинами диагоналей указанных ромбов, откуда и следует требуемое.

в) Заметим, что $AA_1 \perp BD$ по теореме о трёх перпендикулярах (ибо проекция AA_1 есть биссектриса в ромбе $ABCD$). Тогда $BD \perp (AA_1C_1)$, искомый угол $\varphi = 30°$.

д) Данные плоскости перпендикулярны, так как одна из них (BB_1D_1) содержит перпендикуляр BD к другой. Итак, $\varphi = 90°$.

2) а) Искомое расстояние было найдено в п. «1, а», $|AH| = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

б) Так как $AA_1 \parallel (BDD_1)$, то искомое расстояние равно расстоянию от A_1 до (BDD_1), т. е. $|A_1O|$. В п. «1, б» установлено, что A_1B_1CD — квадрат с единичной стороной. Искомое расстояние равно $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

в) В п. «1, а» установлено, что $\angle((C_1B_1); (B_1D_1C)) = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$ (так как трёхгранный угол с вершиной B_1 и рёбрами B_1C_1, B_1D_1 и B_1C имеет все плоские углы, равные 60°). Тогда искомое расстояние равно $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Совпадение этого ответа с ответом п. «а» не случайно. В том и другом случаях искали высоту правильного тетраэдра с единичным ребром. В п. «а» это был тетраэдр AA_1BD, а в данном пункте — тетраэдр $C_1CB_1D_1$.

г) Это расстояние равно расстоянию от AA_1 до плоскости (B_1BD) (так как $AA_1 \parallel (B_1BD)$, а $(BD) \subset (B_1BD)$), искомое расстояние равно $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

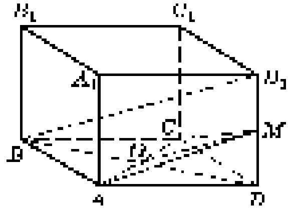

Рис. 8

22.11. Пусть сечение проходит через AC параллельно BD_1 (рис. 8). Заметим, что сечение пройдёт через середину M ребра DD_1 (достаточно рассмотреть плоскость (BDD_1), пересекающую плоскость сечения по прямой OM, параллельной BD_1 и проходящей через O — середину BD). Так как треугольник AMC равносторонний, то $\Delta ADM = \Delta CDM$ по катету и гипотенузе. Значит, $AD = CD$ и в основании параллелепипеда — квадрат. Пусть $x = \frac{|DD_1|}{2}$, $a = |AD|$. Тогда из прямоугольного треугольника ADM и равенства $|AC| = |AM|$ имеем уравнение $2a^2 = a^2 + x^2$, откуда $a = x$. Следовательно, сторона DD_1 наибольшая, значит, остальные рёбра имеют длину $\frac{1}{2}$.

22.12. Сечение может иметь либо форму треугольника, либо пересекать основание призмы $A_1B_1C_1$ (рис. 9) и иметь форму трапеции. Форма треугольника будет у сечения, если

$$\varphi < \angle((ABC);(A_1BC)) = \operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

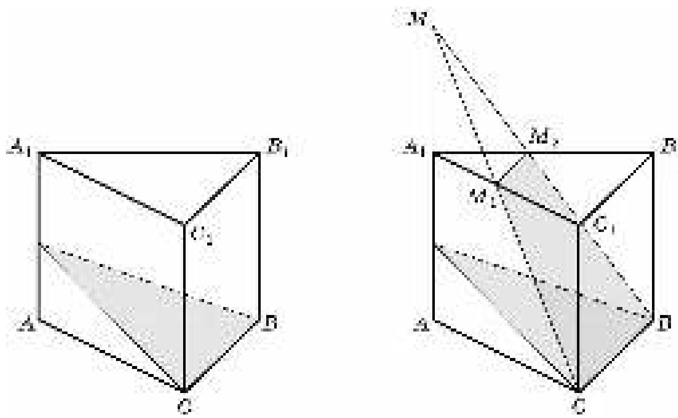

Рис. 9

В первом случае по теореме о площади ортогональной проекции $S = \frac{\sqrt{3}}{4\cos\varphi}$.

Во втором случае $S = \frac{S_{B_1C_1M_1M_2}}{\cos\varphi}$. Для нахождения площади $B_1C_1M_1M_2$ продлим сечение до пересечения с прямой AA_1 в точке M. Из подобия треугольников A_1MM_2 и AMB имеем $|A_1M_1| = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\varphi - 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\varphi}$. Треугольники $A_1M_1M_2$ и $A_1B_1C_1$ подобны с коэффициентом $k = \dfrac{|A_1M_1|}{|A_1B_1|} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\varphi - 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\varphi}$.

Значит, $S_{\triangle A_1M_1M_2} = k^2 S_{\triangle A_1B_1C_1}$. Тогда $S_{B_1C_1M_1M_2} = \left(1 - k^2\right) S_{\triangle A_1B_1C_1} = \dfrac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3}\operatorname{tg}^2\varphi}$. Окончательно получаем площадь сечения во втором случае $S = \dfrac{\sqrt{3}\sin\varphi - \cos\varphi}{\sqrt{3}\sin^2\varphi}$.

Для выяснения вопроса о том, в каких границах находится площадь сечения, заметим, что, пока сечение треугольно, площадь сечения растёт с увеличением φ. Наибольшая площадь среди треугольных сечений будет у сечения A_1BC. Взяв производную по φ от выражения площади четырёхугольного сечения, можно убедиться, что и в этом случае площадь сечения есть возрастающая функция от φ. Таким образом, площадь сечения лежит в границах от S_{ABC} до $S_{BB_1C_1C}$, т. е. от $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ до 1.

22.13. б) Эта задача является в точности задачей **22.12**. Поэтому ответ такой же: от $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ до 1.

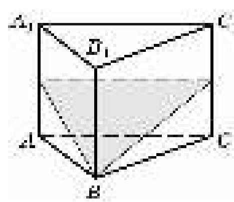

Рис. 10

а) Пусть сечение проходит через вершину B, пересекая грань ACC_1A_1 (рис. 10) и составляя угол φ с плоскостью основания призмы. По теореме о площади ортогональной проекции $S_{\text{сеч}} = \dfrac{S_{ABC}}{\cos\varphi} = \dfrac{\sqrt{3}}{4\cos\varphi}$. Тогда площадь будет наибольшей у сечения A_1BC_1.

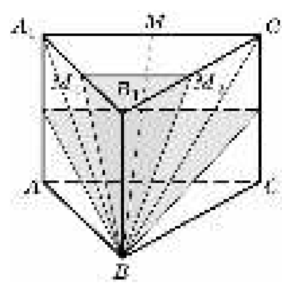

Рис. 11

Пусть теперь сечение пересекает грань $A_1B_1C_1$ (рис. 11). Заметим, что это сечение является равнобедренным треугольником M_1BM_2, основание которого меньше $|A_1C_1|$, а высота меньше $|BM|$ (M — середина A_1C_1). Поэтому $S_{M_1BM_2} < S_{A_1BC_1}$. В вырожденном случае площадь сечения нулевая. Таким образом, площадь сечения меняется в границах от 0 до $S_{A_1BC_1}$. Воспользовавшись любой из формул задачи **22.12** при $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, получим $S_{A_1BC_1} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

22.14. Рассмотрим развёртки призмы (рис. 12). Путь по поверхности призмы представляется на развёртке некоторой ломаной. Ясно, что кратчайшая из таких ломаных должна лежать на одной прямой. Таким образом, нам осталось из прямолинейных отрезков, соединяющих точки M и B_1, выбрать кратчайший.

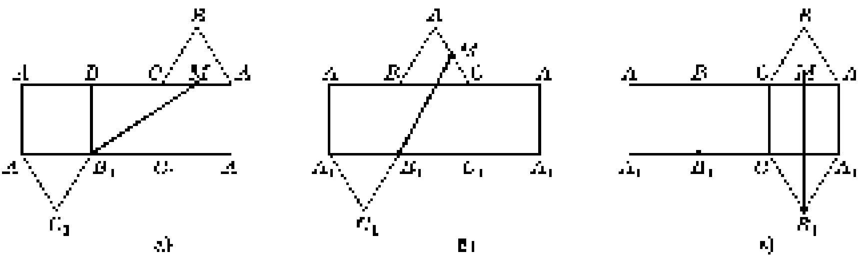

Рис. 12

Если одно из рёбер BC и AB не разрезано, то кратчайший путь изображается так, как на рисунке 12, *б*. Его длина равна $\dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1}{2}$. Если же оба указанных ребра разрезаны, то кратчайший путь изображается так, как на рисунках 12, *а*, *в*. Длина меньшего из путей равна $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$. Сравнив эти числа, получаем ответ: длина кратчайшего пути равна $\dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1}{2}$.

Приведёнными вариантами все случаи развёрток не исчерпываются, но во всех остальных расстояние между указанными точками будет больше.

22.15. Эта задача решается полностью аналогично предыдущей, с той только разницей, что есть два существенно различных положения точек K и L: на гранях AA_1D_1D и BB_1C_1C или на гранях AA_1B_1B и DD_1C_1C. После рассмотрения развёрток в обоих случаях получается о т в е т 42.

22.16. Такой точки нет. Если бы она существовала, то находилась бы на пересечении плоскостей A_1B_1C и CA_1B, т. е. на прямой A_1C.

По аналогичным причинам эта точка находилась бы на BC_1. Но эти прямые не имеют общих точек.

22.17. а) Да. Возьмём две неперпендикулярные плоскости и прямоугольник в одной из них со стороной на прямой их пересечения. Эта сторона послужит стороной основания призмы, лежащего в другой плоскости.

б) Такой призмы нет. В противном случае общее ребро двух прямоугольников было бы перпендикулярно плоскости основания призмы, а значит, все боковые рёбра были бы перпендикулярными плоскости основания. Тогда и третья грань призмы была бы прямоугольником.

в) Да, такая призма есть. Возьмём две перпендикулярные плоскости и проведём в одной из них пару параллельных прямых, пересекающих линию пересечения плоскостей и не перпендикулярных ей. Далее, считая стороной основания призмы отрезок между точками пересечения построенных прямых с прямой пересечения плоскостей, а проведённые прямые — содержащими рёбра призмы, легко достроить саму призму и убедиться, что она удовлетворяет условию (рис. 13).

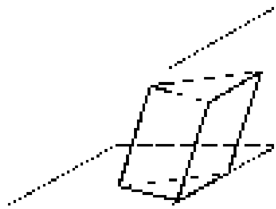

Рис. 13

г) Такой призмы нет. В противном случае общее ребро этих граней перпендикулярно плоскости основания, тогда все боковые рёбра перпендикулярны плоскости основания, а значит, все боковые грани перпендикулярны плоскости основания.

д) В качестве примера такой призмы может служить призма из п. «а».

е) Очевидно, что центр вписанной сферы данной призмы есть середина отрезка между центрами окружностей, вписанных в основание (при этом призма должна быть прямой). В то же время центр описанной сферы прямой призмы лежит на середине отрезка, соединяющего центры описанных окружностей оснований. Ясно, что эти центры совпадают только в случае, когда основанием призмы является правильный треугольник.

22.18. а) Нет. Примером может служить параллелепипед из задачи **22.10**.

б) Нет. Любая прямая призма удовлетворяет этому условию, но в основании необязательно лежит правильный многоугольник.

в) Нет. У прямоугольного параллелепипеда диагональные сечения равны.

г) Нет. Вокруг любой треугольной прямой призмы можно описать сферу.

д) Нет. В прямую призму можно вписать сферу, если её высота равна диаметру окружности, вписанной в основания.

е) Нет. Каждая точка отрезка, соединяющего центры описанных окружностей оснований прямой призмы, равноудалена от боковых рёбер. Надлежащим выбором высоты призмы можно добиться, чтобы середина этого отрезка была равноудалена от всех рёбер призмы.

22.19. а) Площади остальных боковых граней также равны S. Сторона перпендикулярного сечения есть высота параллелограмма боковой грани, если основанием параллелограмма считать боковое ребро.

б) Расстояние от ребра до плоскости противоположной грани найти нельзя. Искомое расстояние равно длине высоты равностороннего треугольника перпендикулярного сечения. Ясно, что, сжав равносторонний треугольник в два раза и увеличив во столько же раз длину бокового ребра призмы, мы получим призму, удовлетворяющую условию, у которой искомое расстояние будет другим.

в) Площадь основания найти нельзя. Представим себе бесконечную призматическую трубу, перпендикулярное сечение которой — правильный треугольник. Ясно, что при пересечении этой трубы различными плоскостями будут получаться сечения разной площади. Тогда, откладывая каждый раз от вершин этих сечений по одну сторону от плоскостей этих сечений равные отрезки так, чтобы площадь боковой грани была равна S, получим в каждом случае призму, удовлетворяющую условию.

22.20. В параллелепипеде имеются 6 граней, разбивающихся на пары равных. Поэтому прямоугольных граней может быть чётное число.

Нетрудно построить параллелепипед с двумя прямоугольными гранями (наклонная призма с прямоугольным основанием). Существует параллелепипед и с четырьмя прямоугольными гранями (прямая призма с непрямоугольным основанием). Наконец, есть параллелепипед с шестью прямоугольными гранями (прямоугольный). О т в е т: 2, 4 или 6.

22.21. а) Можно лишь утверждать, что все грани такого параллелепипеда — ромбы (так как боковые грани равны, то основания — ромбы, а у параллелепипеда любая пара параллельных граней может быть основаниями).

б) Ничего определённого ни про форму параллелепипеда, ни даже про форму граней сказать нельзя. Соответствующие примеры легко строятся. Можно лишь утверждать, что высоты параллелепипеда к любой из граней равны (однако доказательство этого утверждения лучше отложить до изучения темы «Объёмы тел»).

в) Этот параллелепипед прямоугольный. Действительно, его диагональные сечения являются прямоугольниками (параллелограммы с равными диагоналями), т. е. боковые рёбра перпендикулярны основанию. Но в качестве основания можно использовать любую грань. Ясно, что прямоугольный параллелепипед подходит (каждая его диагональ равна сумме квадратов измерений).

г) Этот параллелепипед прямой (т. е. прямая призма необязательно с прямоугольным основанием). Прямая пересечения диагональных сечений (проходящая через центры оснований параллелепипеда) перпендикулярна плоскостям оснований и в то же время параллельна боковому ребру.

д) Это прямой параллелепипед с ромбом в основании. Так как смежные грани — квадраты, то их общее ребро перпендикулярно плоскости основания.

е) Этот параллелепипед прямоугольный. Действительно, если стороны перпендикулярного сечения сами перпендикулярны, то двугранный угол при боковом ребре равен 90°. Тогда плоскости боковых граней перпендикулярны. Далее применим вывод п. «г».

з) Все перпендикулярные сечения данного параллелепипеда являются ромбами с одинаковым радиусом вписанной окружности. Действительно, заметим, что если сфера вписана в призму, то основания перпендикуляров из центра сферы на боковые грани и сам центр лежат в плоскости, перпендикулярной боковому ребру. Тогда перпендикулярное сечение призмы — вписанный многоугольник, радиус вписанной окружности которого равен радиусу сферы.

Несколько сложнее доказать то, что любой такой параллелепипед подходит. Но это так. Действительно, в таком параллелепипеде имеется прямая, любая точка которой равноудалена от четырёх боковых граней. При этом такие прямые, возникающие при разном выборе оснований, пересекутся в центре вписанной сферы.

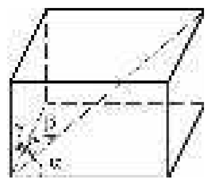

Рис. 14

22.22. Пусть α, β, γ — углы, образованные диагональю прямоугольного параллелепипеда с рёбрами, выходящими из той же вершины (рис. 14). Тогда $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Понизив степень, имеем $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$. Докажем теперь, что если сумма *острых* углов α, β, γ_1 ($\alpha < \beta < \gamma_1$) равна 180°, то

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma_1 < -1. \qquad (*)$$

Из этого следует утверждение задачи, так как тогда $\cos 2\gamma_1 < \cos 2\gamma$, т. е. $\gamma_1 > \gamma$.

Преобразуем в утверждении (*) сумму косинусов в произведение. Получаем:

$$2\cos(\alpha + \beta)\cos(\beta - \alpha) + 2\cos^2\gamma_1 < 0,$$

или:

$$2\cos^2\gamma_1 - 2\cos\gamma_1\cos(\alpha - \beta) < 0.$$

Это утверждение верно, так как из упорядоченности углов по величине $\cos\gamma_1 \cos\gamma_1 < (\beta - \alpha)$.

Ясно, что улучшить оценку 180° нельзя, так как такова сумма углов, образованных боковым ребром с двумя другими. Делая параллелепипед почти отрезком, можно добиться того, чтобы сумма углов была сколь угодно близка к 180°.

С помощью «неравенства треугольника» для трёхгранного угла легко доказать, что $\alpha + \beta + \gamma > 135°$.

Таким образом, получаем:

$$135° < \alpha + \beta + \gamma < 180°.$$

Заметим, что углы между диагональю параллелепипеда и диагоналями граней с общей вершиной дополняют до 90° углы α, β, γ. Поэтому сумма этих углов лежит между 90° и 180°.

Возможно и иное решение данной задачи. Именно: достроим три равных друг другу параллелепипеда, имеющих общую вершину (рис. 15). Тогда получится трёхгранный угол, плоские углы которого равны 2α, 2β,

2γ. Так как сумма плоских углов трёхгранного угла не больше 360°, получим требуемое.

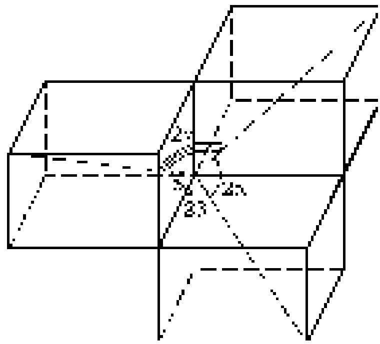

Рис. 15

22.23. У четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеются четыре диагонали. При этом они разбиваются на две пары: AC_1, A_1C и BD_1, B_1D. В каждой из этих пар диагонали пересекаются, делясь точкой пересечения пополам (так как четырёхугольники AA_1C_1C и BB_1D_1D являются параллелограммами). Поэтому если три диагонали четырёхугольной призмы пересекутся в одной точке, то четвёртая диагональ пройдёт через эту же точку, причём точка пересечения будет серединой всех диагоналей. Из этого следует, что основания призмы — параллелограммы, т. е. призма — параллелепипед.

Заметим, что если диагонали из разных пар пересеклись (например, AC_1 пересеклась с BD_1), то точки A, C_1, D_1, B лежат в одной плоскости, а тогда $AB \parallel C_1D_1$. Иначе говоря, в основании призмы лежит трапеция. Однако если одна из диагоналей трапеции ABC_1D_1 делится точкой пересечения пополам, то трапеция является параллелограммом, а исходная призма — параллелепипедом.

22.24. а) Пусть исходная призма $ABCA_1B_1C_1$. Измеряем величины плоских углов при вершине A: $\angle A_1AB = \alpha$, $\angle A_1AC = \beta$ и $\angle BAC = \gamma$. По теореме косинусов для трёхгранного угла с вершиной A вычисляем величину двугранного угла с ребром AB:

$$\cos\angle AB = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}.$$

Положив $|AA_1| = a$, вычислим длину перпендикуляра A_1H_1 из точки A_1 на AB: $|A_1H_1| = a\cos\alpha$. Затем вычисляем длину высоты A_1H из A_1 на плоскость (ABC): $|A_1H| = |A_1H_1|\sin\angle AB$. Синус искомого угла находится по формуле $\sin x = \dfrac{|A_1H_1|}{|A_1A|}$. Линейный размер $|AA_1| = a$ сократится, поэтому его измерять не надо.

Ясно, что двумя измерениями обойтись нельзя, так как при любых фиксированных двух величинах искомый угол может изменяться.

б) Решение ничем не отличается от решения п. «а», так как по-прежнему находится угол между ребром и противоположной гранью в трёхгранном угле. Поэтому достаточно сделать те же измерения и вычисления с точностью до замены обозначений.

в) Косинус одного из углов между основанием и боковой гранью найден в п. «а» по теореме косинусов для трёхгранного угла. Таким образом, и здесь достаточно измерить три плоских угла с общей вершиной.

г) Косинус угла между двумя боковыми гранями находится из теоремы косинусов для трёхгранного угла.

В качестве комментария заметим, что требуются три измерения плоских углов на поверхности пирамиды. Если измерять лишь линейные элементы, то измерений потребуется больше. Действительно, для однозначного определения плоского угла требуется задать фактически треугольник, т. е. произвести три линейных измерения. Необходимо уметь вычислять величины трёх плоских углов с общей вершиной, для чего нужно знать линейные размеры трёх треугольников в разных плоскостях. У каждой пары треугольников есть не более одного общего линейного размера, поэтому всего нужно произвести не менее шести измерений линейных величин.

§ 23. Пирамиды

Сделаем несколько замечаний.

1. Одна из пирамид на рисунке 41 учебника не считается пирамидой в других учебниках.

2. Слова «Свойства 1 и 2 характеризуют правильную пирамиду» (п. 23.2), возможно, следовало бы уточнить: «Свойства 1 и 2 являются характеристическими для правильной пирамиды», ибо слово «характеризуют» является слишком расплывчатым.

3. Разбирая свойства правильной пирамиды, полезно рассмотреть их ослабления (например: будет ли правильной пирамида, у которой равны все боковые рёбра?). Такие вопросы могут послужить началом нескольких занятий (по поводу упомянутого вопроса см. задачу **23.36**).

4. Пункты 23.3 и 23.4 можно дать учащимся для самостоятельного рассмотрения.

Задачи к § 23

23.2. а) Приведённый факт верен не только для правильной, но и для любой пирамиды. Он является следствием теоремы о трёх перпендикулярах. Именно: высота пирамиды перпендикулярна стороне основания, лежащей в плоскости боковой грани, а потому проекция этой высоты на плоскость боковой грани перпендикулярна стороне основания (рис. 16).

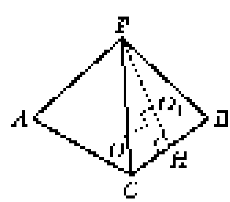

Рис. 16

б) Утверждение следует из предыдущего пункта, так как боковая грань пирамиды — равнобедренный треугольник, в котором высота есть медиана.

в) — д) Согласно п. 23.3, правильная n-угольная пирамида самосовмещается при повороте вокруг прямой, содержащей высоту, на углы, кратные $\frac{360°}{n}$. Ясно, что такими поворотами любое боковое ребро может быть совмещено с любым другим боковым ребром, любая боковая грань — с любой другой боковой гранью, любое ребро основания — с любым другим ребром основания. Поэтому все упомянутые расстояния и углы при таких поворотах сохранятся.

е) При повороте на угол $\frac{360°}{n}$ пара соседних боковых граней перейдёт в следующую такую пару. Значит, углы между соседними боковыми гранями равны.

23.3. а) Из задачи **23.2в** следует, что для каждой точки прямой, содержащей высоту, существует сфера с центром в этой точке, содержащая все вершины основания правильной пирамиды. Таким образом, на прямой, содержащей высоту, достаточно найти точку, равноудалённую от какой-либо вершины основания и от вершины пирамиды. Эта точка есть точка пересечения плоскости, перпендикулярной боковому ребру в его середине, и прямой, содержащей высоту.

б) Из задачи **23.2в** следует, что для каждой точки прямой, содержащей высоту, существует сфера, касающаяся всех боковых граней. Поэтому на данной прямой достаточно найти точку, равноудалённую от какой-либо боковой грани и от основания пирамиды. Эта точка есть точка пересечения биссекторной плоскости угла между боковой гранью и основанием.

23.4. Пусть сторона основания правильной n-угольной пирамиды $SA_1A_2\ldots A_n$ имеет длину a, а плоский угол при вершине равен α. Опустим высоту пирамиды SH. Пусть H_1 — середина стороны AA_1 (рис. 17). Тогда

$$|SA_1| = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad |SH_1| = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$|HH_1| = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}.$$

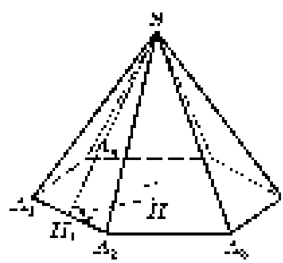

Рис. 17

а) Из прямоугольного треугольника SHH_1 получим:

$$|SH| = \sqrt{|SH_1|^2 - |HH_1|^2} = \frac{n}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}^2\frac{180°}{n}}.$$

б) Пусть O — центр описанной сферы. Тогда, рассмотрев сечение пирамиды плоскостью SA_1H, получим $\dfrac{|SO|}{|SA_1|} = \dfrac{\frac{|SA_1|}{2}}{|SH|}$ (рис. 18) (здесь использовано подобие прямоугольных треугольников), откуда

$$R = |SO| = \frac{a}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \mathrm{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}}}.$$

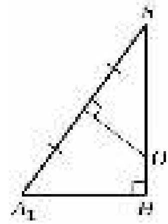

Рис. 18

в) Пусть I — центр вписанной сферы. Рассмотрим часть сечения пирамиды плоскостью SHH_1 (рис. 19). Используя свойство биссектрисы треугольника с учётом того, что плоскость SHH_1 перпендикулярна A_1A_2, имеем $\dfrac{|IH|}{|IS|} = \dfrac{|H_1H|}{|H_1S|}$, откуда $|IH| = \dfrac{(|SH| - |IH|)\cdot|H_1H|}{|H_1S|}$. Решая это уравнение относительно $|IH|$, получаем:

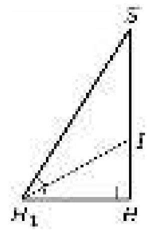

Рис. 19

$$r = |IH| = \frac{|SH|\cdot|H_1H|}{|H_1H| + |H_1S|} = \frac{a}{2}\ \mathrm{ctg}\ \frac{180^\circ}{n}\sqrt{\frac{\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} - \mathrm{ctg}\frac{180^\circ}{n}}{\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{ctg}\frac{180^\circ}{n}}}.$$

г) Из прямоугольного треугольника SHA_1 имеем $\sin\angle SA_1H = \dfrac{|SH|}{|SA_1|} = \sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\mathrm{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2} - \mathrm{ctg}^2\dfrac{180^\circ}{n}}$.

д) Из прямоугольного треугольника SHH_1 имеем $\cos\angle SH_1H = \dfrac{\mathrm{ctg}\frac{180^\circ}{n}}{\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}$. Этот же угол является и ответом п. «е».

ж) Пусть A_1K — боковая высота треугольника A_1SA_2. Тогда $|A_1K| = |A_1A_2|\sin\angle A_1A_2S = a\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

Теперь найдём $|A_1A_3|$ из равнобедренного треугольника $A_1A_2A_3$ с углом $A_3A_1A_2 = \dfrac{180^\circ}{n}$ при основании. Имеем $|A_1A_3| = 2a\cos\dfrac{180^\circ}{n}$.

Тогда искомый угол есть $\angle A_1KA_3 = 2\arcsin\dfrac{\cos\frac{180^\circ}{n}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Из решения ясно, что для полного задания правильной n-угольной пирамиды достаточно задать два независимых элемента (например, сторону основания и плоский угол при вершине).

23.5. Пусть $A_1A_2\ldots A_nB_1B_2\ldots B_n$ — данная правильная усечённая n-угольная пирамида. Проведя высоту B_1H пирамиды, получим прямоугольный треугольник B_1HA_1, в котором известны гипотенуза A_1B_1 и катет HA_1, равный разности радиусов описанных окружностей оснований пирамиды. Отсюда по теореме Пифагора можно найти высоту.

23.6. Пусть дан тетраэдр $ABCD$ и пусть M_1 и M_2 — точки пересечения медиан граней ACD и BCD соответственно (рис. 20). Покажем, что отрезки BM_1 и AM_2 пересекаются, делясь точкой пересечения в отношении 3 : 1, считая от вершин тетраэдра. Тем самым утверждение задачи будет доказано, так как аналогичными рассуждениями можно показать, что любые два отрезка, соединяющие вершину с точками пересечения медиан противоположных граней, точкой пересечения делятся в том же отношении, т. е. эта точка одна.

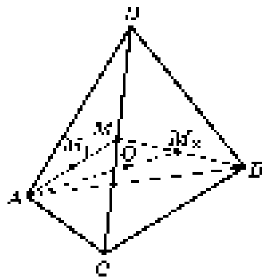

Рис. 20

Пусть M — середина CD. Рассмотрим сечение тетраэдра плоскостью ABM. В этой плоскости лежат рассматриваемые отрезки BM_1 и AM_2. Обозначим точку пересечения этих отрезков через O (они пересекаются, так как соединяют вершину треугольника с точкой на противоположной стороне). Площадь треугольника ABM обозначим через S.

Заметим, что $\dfrac{|AO|}{|OM_2|} = \dfrac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOM_2}}$ (это два треугольника с общей высотой из вершины B). По той же причине $S_{\triangle ABM_1} = S_{\triangle ABM_2} = \dfrac{2}{3}S$, а $S_{\triangle AM_2M} = \dfrac{1}{3}S$.

Пусть $S_{\triangle MM_1O} = x$. Тогда $S_{\triangle M_2OB} = 2x$, $S_{\triangle AM_1O} = 2x$ (эти площади равны, так как получены вычитанием из равных площадей ABM_1 и ABM_2 площади треугольника AOB); $S_{\triangle MM_2C} = \dfrac{1}{2}S_{\triangle AM_1C} = x.$ Рассмотрев площадь треугольника MM_2A, получаем уравнение $4x = \dfrac{1}{3}S$, откуда $x = \dfrac{1}{12}S.$

Тогда $\dfrac{|AO|}{|OM_2|} = \dfrac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOM_2}} = \dfrac{\frac{2}{3}S - \frac{1}{6}S}{\frac{1}{6}S} = \dfrac{3}{1}.$

З а м е ч а н и я. 1) Конечно, приведённый способ подсчёта указанного отношения не является единственно возможным. Здесь можно воспользоваться векторной техникой (разложить все векторы по базису двух сторон треугольника и, приняв неизвестные отношения за переменные, получить уравнения, воспользовавшись единственностью разложения по базису). Можно также применить геометрию масс (точка O является центром масс системы A, B, M, т. е. центром масс M_2, B, т. е. делит отрезок M_2B в обратном отношении масс в соответствии с правилом рычага).

2) Можно сразу воспользоваться соображениями геометрии масс в пространстве. Искомая точка будет центром масс системы вершин тетраэдра, нагруженных единичными массами.

3) То, что указанные отрезки пересекаются в одной точке, можно доказать, не прибегая к вычислению отношений. Действительно, как отмечено в решении, любые два таких отрезка пересекаются. Остаётся воспользоваться известным утверждением о том, что если несколько прямых в пространстве попарно пересекаются, то они либо лежат в одной плоскости, либо проходят через одну точку, заметив, что указанные отрезки не лежат в одной плоскости.

4) Перед решением этой задачи полезно вспомнить планиметрические задачи о делении точкой пересечения отрезков, проведённых из вершины на сторону треугольника. Фактически бо́льшая часть приведённого решения является решением такой задачи.

23.7. Пусть $PABCD$ — пирамида с квадратным основанием $ABCD$. У этой пирамиды может быть любое количество граней — прямоугольных треугольников: от одной до четырёх (рис. 21). Приведём пример пирамиды с четырьмя такими гранями. Пусть $\angle PBA = \angle PBC = 90°$. Тогда $AB \perp PBC$,

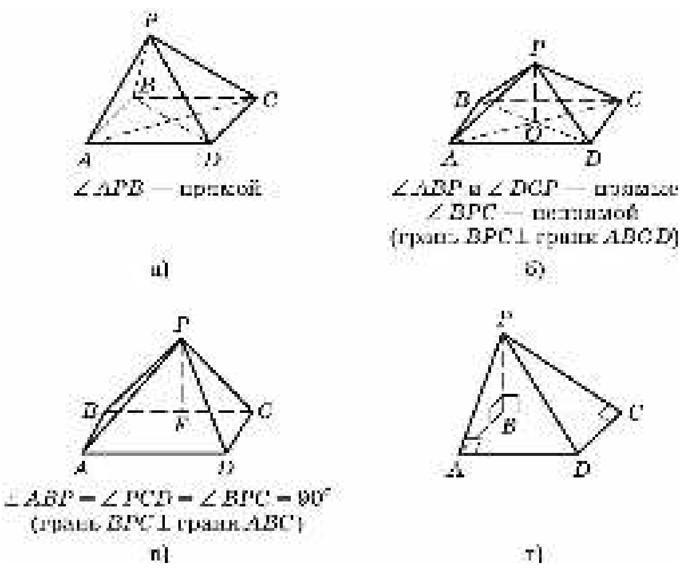

Рис. 21

значит, $DC \perp PBC$, отсюда $\angle PCD = 90°$. Осталось заметить, что по теореме о трёх перпендикулярах $PA \perp AD$, так как проекция прямой PA на плоскость основания есть BA, причём $BA \perp AD$.

Покажем теперь, что есть два возможных расположения прямых углов в боковых гранях четырёхугольной пирамиды с прямоугольным основанием, если все эти грани — прямоугольные треугольники.

1) Если прямые углы в боковых гранях только при вершинах основания и при этом никакие два не примыкают к одному и тому же боковому ребру, то каждое боковое ребро является гипотенузой в каком-то треугольнике и, следовательно, больше предыдущего, что невозможно.

Значит, какое-то боковое ребро перпендикулярно основанию, после чего расположение оставшихся прямых углов восстанавливается однозначно.

2) Рассмотрим случай, когда прямой угол может быть при вершине пирамиды. Так как все углы при вершине не могут быть прямыми (см. решение и ответ предыдущей задачи), существует прямой угол при вершине основания. Не умаляя общности, пусть $\angle PAD = 90°$. Тогда $DA \perp PAB$, откуда $\angle PBC = 90°$. Ни один из углов PAB и PBA не является прямым (иначе одно из боковых рёбер PA или PB перпендикулярно основанию, а это только что рассмотренный случай), значит, угол APB равен 90°. Оставшийся прямой угол в треугольнике PCD может быть расположен только в вершине основания. В противном случае $|PC|^2 + |PD|^2 = |CD|^2$, но $|PC| > |PB|$, $|PD| > |PA|$ и при этом $|PA|^2 + |PB|^2 = |AB|^2 = |CD|^2$.

Расположения прямого угла в грани PCD при вершинах C и D симметричны (в том смысле, что перестановкой букв одно из них может перейти в другое).

23.8. Докажем, что сумма углов при вершине пирамиды меньше 360°.

Пусть $SA_1A_2\ldots A_n$ — произвольная n-угольная пирамида (многоугольник в её основании может быть как выпуклым, так и невыпуклым). Рассмотрим трёхгранные углы с вершинами в вершинах основания и запишем для них «неравенство треугольника»:

$$\angle SA_1A_n + \angle SA_1A_2 > \angle A_nA_1A_2,$$
$$\angle SA_2A_1 + \angle SA_2A_3 > \angle A_1A_2A_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\angle SA_nA_{n-1} + \angle SA_nA_1 > \angle A_{n-1}A_nA_1.$$

Сложив эти неравенства, получим неравенство, в левой части которого стоит сумма плоских углов боковых граней, прилегающих к основанию пирамиды, а в правой части — сумма углов основания, т. е. $180°(n-2)$. Заметим, что сумма всех плоских углов боковых граней равна $180°n$. Поэтому в левой части неравенства имеем $180°n - \Sigma$, где Σ — сумма плоских углов боковых граней при вершине S. Итак, имеем:

$$180°n - \Sigma > 180°(n-2),$$

откуда $\Sigma < 360°$.

23.9. Пусть $SA_1A_2...A_n$ — пирамида, SH — её высота.

а) Заметим, что для этой пирамиды все прямоугольные треугольники SHA_i ($i = 1, \ldots, n$) равны по общему катету SH и острым углам SA_iH. Поэтому все расстояния $|HA_i|$ одинаковы. Тогда многоугольник $A_1A_2...A_n$ может быть вписан в окружность, центром которой является основание высоты пирамиды.

б) Проведём две апофемы SH_1 и SH_2 в произвольных боковых гранях пирамиды. Углы SH_1H и SH_2H равны как линейные углы равных двугранных углов. Поэтому из равенства прямоугольных треугольников SHH_1 и SHH_2 получаем $|HH_1| = |HH_2|$. Так как апофемы взяты произвольно, то это означает, что точка H равноудалена от всех прямых, содержащих стороны многоугольника основания. Тем самым существует окружность с центром в основании высоты, касающаяся всех прямых, содержащих стороны многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$.

Сказанное не означает, что данный многоугольник может быть описан около окружности, даже если он выпуклый.

23.10. В правильной пирамиде боковая грань не может быть перпендикулярной основанию, так как в этом случае все боковые грани оказались бы перпендикулярны основанию, а тогда боковые рёбра правильной пирамиды окажутся параллельны (как перпендикуляры к одной плоскости), что невозможно.

В правильной треугольной пирамиде две боковые грани могут быть перпендикулярны (тогда, естественно, прямыми будут двугранные углы при любом боковом ребре). Такую пирамиду можно отсечь от куба плоскостью, проведённой через три вершины, соединённые рёбрами с одной и той же вершиной (рис. 22).

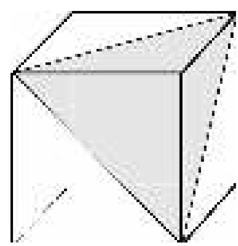

Рис. 22

В правильной n-угольной пирамиде ($n \geqslant 4$) две соседние боковые грани не могут быть перпендикулярны. Действительно, пусть $SA_1A_2\ldots A_n$ — правильная пирамида и пусть $SA_1A_2 \perp SA_2A_3$. Рассмотрим две боковые высоты в этих гранях A_1K и A_3K (очевидно, что они будут иметь общее основание на ребре SA_2 в силу равенства треугольников боковых граней и их равнобедренности). Тогда треугольник A_1KA_3 должен быть прямоугольным, а значит, $|A_1K|^2 + |A_3K|^2 = |A_1A_3|^2$. С другой стороны, $|A_1A_2|^2 + |A_2A_3|^2 \geqslant |A_1A_3|^2$, так как $\angle A_1A_2A_3 \geqslant 90°$ в правильном многоугольнике с более чем тремя сторонами. Чтобы прийти к противоречию, остаётся заметить, что длина боковой высоты меньше длины основания треугольника.

В то же время нетрудно построить правильную четырёхугольную пирамиду, у которой противоположные боковые грани перпендикулярны. Для этого достаточно, чтобы высота пирамиды была равна половине стороны основания. Легко убедиться, что получится искомая пирамида.

Также нетрудно построить правильную n-угольную пирамиду, у которой будут перпендикулярные боковые грани, нужным образом подобрав длину высоты. Существование такой пирамиды следует из принципа непрерывности.

23.11. Заметим, что основание пирамиды и сечение её плоскостью, параллельной основанию, — гомотетичные многоугольники. При этом квадрат коэффициента гомотетии равен отношению площадей.

Теперь легко получить о т в е т: $\frac{H}{\sqrt{S}}\left|\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}\right|$.

23.12. Построим для нашего тетраэдра сопровождающий параллелепипед, т. е. параллелепипед, у которого в каждой грани ровно одна диагональ является ребром тетраэдра (рис. 23). Такой параллелепипед можно построить, проводя через пары скрещивающихся рёбер тетраэдра параллельные плоскости (для каждой пары скрещивающихся прямых существует единственная пара параллельных плоскостей, каждая из которых содержит ровно одну из этих прямых).

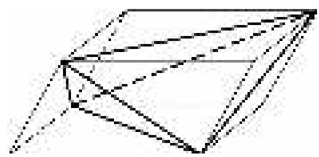

Рис. 23

В этом параллелепипеде известны все диагонали всех граней. Воспользовавшись тождеством параллелограмма (сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон) для трёх граней параллелепипеда с общей вершиной, получим легко решаемую систему из трёх уравнений с тремя неизвестными для сторон параллелепипеда. Остаётся заметить, что диагоналями грани сопровождающего параллелепипеда будут ребро тетраэдра и отрезок, равный и параллельный противоположному ребру. Поэтому искомый угол равен углу между диагоналями соответствующей грани сопровождающего параллелепипеда. Зная стороны и длины диагоналей, этот угол легко найти по теореме косинусов.

Для тетраэдра, длины рёбер которого обозначены a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 (у противоположных рёбер длины обозначены одинаковыми буквами с разными индексами), для косинуса угла между рёбрами с длинами a_1, a_2 получаем выражение:

$$\cos\alpha = \frac{|c_1^2 + c_2^2 - b_1^2 - b_2^2|}{2a_1a_2}.$$

23.13. Пусть сторона треугольника ABC имеет длину a. Тогда из условия имеем $|PB| = |AB| = |AC| = |BC| = a$, $|PA| = |PC| = a\sqrt{2}$.

а) Применяя результат предыдущей задачи, получаем $\cos\varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Тот же результат получится, если рассмотреть прямую, проходящую через P параллельно AB и отложить на ней отрезок $PT = AB$ так, чтобы $PTAB$ был параллелограммом. В треугольнике CPT известны все стороны ($|PT| = a$, $|PC| = |CT| = a\sqrt{2}$), поэтому искомый угол, равный углу CPT, легко найти (рис. 24).

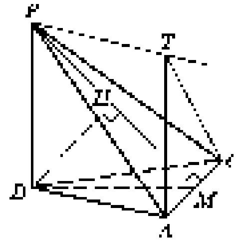

Рис. 24

б) Так как $(ACB) \perp (PCB)$ (одна из этих плоскостей содержит перпендикуляр к другой), высота в грани ABC из вершины A будет перпендикулярна плоскости PCB. Поэтому проекцией AC на плоскость PCB будет BC. Таким образом, $\varphi = 60°$.

в) Опустим высоту BH из вершины B на плоскость PAC. Так как $PB \perp AC$, то и $PH \perp AC$ как проекция PB (по теореме о трёх перпендикулярах). Следовательно, H лежит на высоте (а значит, медиане) PM треугольника PAC.

Рассмотрим отдельно треугольник PBM. Он прямоугольный, и PH — его высота. Поэтому $|BH| = \dfrac{|PM| \cdot |BM|}{|PM|} = a\sqrt{\dfrac{3}{7}}$. Тогда $\varphi = \angle BHC$, $\sin\varphi = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

г) Линейным углом данного двугранного угла будет $\angle PMC$ (M — середина AC). Поэтому $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{|PB|}{|BM|} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

д) По теореме косинусов для трёхгранного угла с вершиной C с учётом, что $\angle PCA = \arccos\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, получим $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

23.14. Прежде всего отметим, что высота, опущенная из вершины P на плоскость ABC, лежит в плоскости PBC. Кроме того, так как двугранные углы при рёбрах AC и AB равны, прямая AP проектируется на плоскость ABC в биссектрису угла A. Поэтому основанием высоты PH, опущенной из вершины P на плоскость ABC, служит точка H — середина стороны BC.

Произведём теперь вспомогательные вычисления, которые окажутся полезными в дальнейшем. Пусть a — длина стороны треугольника ABC.

В плоскости ABC проведём перпендикуляр HK на сторону AC. По теореме о трёх перпендикулярах получим $PK \perp AC$. Тогда угол PKH есть линейный угол двугранного угла между боковой гранью и основанием, поэтому $\angle PKH = \varphi$. Имеем $|HK| = a\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, $|CK| = \dfrac{a}{4}$. Из прямоугольного треугольника PHK получаем $|PH| = \dfrac{a\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi}{4}$, $|PK| = \dfrac{a\sqrt{3}}{4\cos\varphi}$.

Из прямоугольного треугольника PHC находим $|PC| = |PB| = \frac{a}{4}\sqrt{3\,\text{tg}^2\,\varphi + 4}$. Из прямоугольного треугольника PKC находим $\cos\angle PCA = \dfrac{1}{\sqrt{3\,\text{tg}^2\,\varphi + 4}}$.

Наконец, по теореме косинусов в треугольнике PCA найдём $|AP| = \frac{a}{4}\sqrt{3\,\text{tg}^2\,\varphi + 12}$.

а) Так как биссектриса в равностороннем треугольнике является высотой, то проекция PA перпендикулярна BC, а значит, $x = 90°$.

б) Воспользовавшись результатом задачи **23.12** и вычисленными длинами рёбер тетраэдра, получаем:

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{3\,\text{tg}^2\,\varphi + 4}}.$$

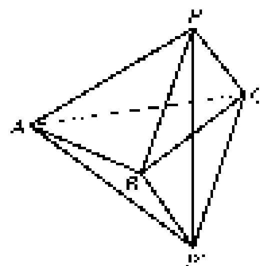

Рис. 25

Этот же результат можно было получить проще. Достаточно симметрично отразить исходный тетраэдр относительно плоскости ABC. Объединением исходного тетраэдра и симметричного в силу перпендикулярности плоскости PBC и плоскости симметрии ABC будет четырёхугольная пирамида $ABPCP'$ (рис. 25), основанием которой служит ромб $BPCP'$. Тогда угол ACP' равен искомому, а из симметрии он равен углу ACP, найденному ранее.

в) Из прямоугольного треугольника PHA имеем:

$$\sin x = \frac{|PH|}{|PA|} = \frac{\text{tg}\,\varphi}{\sqrt{\text{tg}^2\,\varphi + 4}}.$$

г) Воспользуемся второй теоремой косинусов для трёхгранного угла с вершиной в точке A (см.: «Геометрия. 10 класс», с. 152, формула 14.7). Имеем:

$$\cos x = -\cos^2\varphi + \frac{1}{2}\sin^2\varphi.$$

д) Проще всего здесь воспользоваться теоремой о площади проекции фигуры (см.: «Геометрия. 10 класс», задача **14.6**). Имеем:

$$\cos x = \frac{S_{\Delta PCH}}{S_{\Delta PCA}} = \frac{\text{tg}\,\varphi}{2\sqrt{\text{tg}^2\,\varphi + 1}} = \frac{\sin\varphi}{2}.$$

23.15. Пусть сторона основания пирамиды $PABCD$ имеет длину a. Тогда

$|PB| = |AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a$, $|PA| = |PC| = a\sqrt{2}$, $|PD| = a\sqrt{3}$.

а) Так как $AB \parallel CD$, то искомый угол равен углу PDC. Так как треугольник PCD прямоугольный (по теореме о трёх перпендикулярах), то $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

б) Так как прямая PB составляет равные углы с PA и PC, она проектируется на плоскость APC в биссектрису из вершины P равнобедренного треугольника APC. Пусть O — центр основания. Тогда искомый угол есть угол BPO. Из прямоугольного треугольника OBP имеем $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2}$.

в) Искомый угол равен углу между BC и PCD, так как $AD \parallel BC$. Заметим, что $PCD \perp PBC$, так как плоскость PCD содержит перпендикуляр CD к плоскости PBC. Это означает, что проекцией BC на плоскость PCD служит прямая PC. Таким образом, $\varphi = \angle PCB = 45°$.

г) Заметим, что линия пересечения плоскостей PAB и PCD параллельна AB и CD (так как это плоскости, проходящие через параллельные прямые AB и CD). Тогда PB и PC перпендикулярны линии пересечения плоскостей. Значит, $\varphi = \angle BPC = 45°$.

д) Проведём в прямоугольных треугольниках PAD и PCD высоты AH и CH на сторону PD (эти высоты попадут в одну точку в силу равенства треугольников PAD и PCD). Длины этих высот равны. $|AH| = |CH| = \dfrac{|AP| \cdot |AD|}{|PD|} = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Искомым углом будет угол AHC или смежный с ним, который легко находится по теореме косинусов. О т в е т. $\varphi = 60°$.

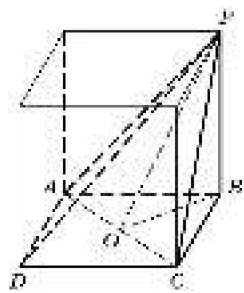

Рис. 26

Этот же результат получается при рассмотрении куба, частью которого является данная пирамида (рис. 26). Указанные две плоскости пересекают диагональное сечение куба (правильный треугольник) по перпендикулярам к главной диагонали куба, которые в треугольнике, являющемся сечением, будут радиусами описанной окружности.

23.16. Заметим, что высота PH данной пирамиды падает в центр основания. Отсюда легко можно найти двугранный угол φ при основании: $\operatorname{tg}\varphi = 2\sqrt{3}$ и угол α наклона бокового ребра к основанию: $\alpha = 60°$.

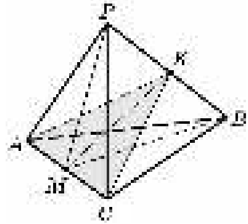

Рис. 27

Пусть AKC — данное сечение (рис. 27). Покажем, что треугольник AKC равнобедренный. Пусть M — середина AC. Так как правильная треугольная пирамида симметрична относительно плоскости *PBM*, сечение переходит в себя при симметрии относительно этой плоскости, причём *AK* и *CK* меняются местами.

а) Рассмотрим треугольник *KBM*. В нём известны сторона $\left(|BM| = d\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и два угла: $\angle KBM = 60°$, $\angle KMB = 30°$. Тогда треугольник *BKM* прямоугольный, откуда $|KM| = \frac{3}{4}d$. Учитывая, что *KM* есть высота в треугольнике *AKC,* получаем:

$$S_{\Delta AKC} = \frac{3}{8}d^2 .$$

Тот же результат можно было получить, применив утверждение о площади проекции. Ведь фактически подсчётом углов было получено, что $PB \perp AKC$, а значит, треугольник *AKC* есть проекция треугольника *ABC* на плоскость *AKC*, причём угол между плоскостями треугольников равен 30°.

б) Из условия следует, что *MK* есть биссектриса угла *PMB*. Тогда, зная в треугольнике *PMB* все стороны ($|PM| = a\sqrt{\frac{13}{12}}$ из прямоугольного треугольника *PHM*, $|PB| = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ из прямоугольного треугольника *PHB*), легко найти длину биссектрисы: $|MK| = d\,\frac{\sqrt{78 - 21\sqrt{13}}}{2}$, откуда $S_{\Delta AKC} = d^2\,\frac{\sqrt{78 - 21\sqrt{13}}}{4}$.

в) Зная все стороны треугольника *PMB*, легко найти его медиану: $|MK| = a\sqrt{\frac{7}{12}}$. Тогда $S_{\Delta AKC} = d^2\,\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{3}}$.

23.17. Воспользуемся принципом непрерывности. Угол меняется от значения в вырожденном случае (вершина лежит в центре основания) до значения 60° (когда вершина уходит в бесконечность и все боковые рёбра окажутся перпендикулярными основанию, т. е. пирамида выродится в «призматическую полутрубу» с правильным треугольником в перпендикулярном сечении).

Для завершения доказательства осталось показать, что с увеличением высоты пирамиды при неизменном основании угол между боковыми гранями уменьшается. Но при увеличении высоты апофема боковой грани увеличивается, значит, увеличивается плоский угол при основании в боковой грани. Тогда боковая высота в грани, равная стороне основания, умноженной на синус угла при основании, тоже увеличивается. Следовательно, косинус угла между боковыми высотами (т. е. угла между гранями) также увеличивается, тем самым угол уменьшается.

О т в е т: от 60° до 180°, не включая конечных значений.

23.18. Случаи расположения прямых углов в боковых гранях разобраны в решении задачи **23.7**. Как в том, так и другом случаях наибольшим является боковое ребро. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через боковое ребро, является треугольником. Таким образом, вопрос о границах площади есть вопрос о границах длин высоты этого треугольника.

Высотой треугольника является расстояние от точки ребра основания, не имеющего с наибольшим боковым ребром общих точек, до самого бокового ребра (рис. 28). Воспользуемся утверждением о том, что расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между проекциями этих прямых на плоскость, перпендикулярную одной из них (одна из проекций будет точкой). Тогда расстояния от наибольшего ребра до рёбер основания как в том, так и другом случаях являются длинами высот боковых граней, не содержащих самое длинное ребро. Наименьшая площадь будет у сечения, совпадающего с боковой гранью, а наибольшая — у сечения, проходящего через противоположное ребро.

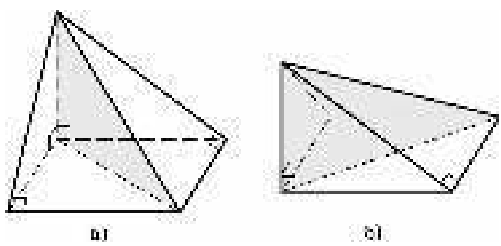

Рис. 28

23.19. Заметим, что условие однозначно определяет расположение граней. Пусть *PABCD* — данная пирамида, *PAB* — равносторонний треугольник. Тогда одна из граней — прямоугольных треугольников должна примыкать к грани *PAB*. Пусть это грань *PAD.* Так как $|PA| = |AD|$ по условию, то именно $\angle PAD = 90°$. Но тогда $AD \perp (PAB)$, а тогда и $BC \perp (PAB)$. Значит, *PBC* — второй прямоугольный треугольник (рис. 29).

Пусть *M* и *N* — середины *AB* и *CD* соответственно. Тогда *PMN* является одним из указанных сечений. Очевидно, что его площадь наибольшая, так как все остальные сечения являются прямоугольными трапециями, которые достраиваются до треугольника, равного *PMN.* Наименьшая же площадь сечения равна нулю. Легко видеть, что $S_{\Delta PMN} = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Итак, площадь сечения меняется от 0 до $a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (здесь *a* — сторона основания).

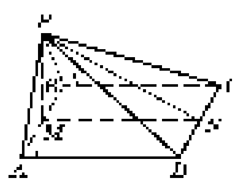

Рис. 29

23.20. а) Докажем, что данная сумма постоянна. Рассмотрим двугранный угол величины α и перпендикуляр к одной из его граней в точке M на ней. Пусть M_1 — точка пересечения этого перпендикуляра с другой гранью, r — расстояние от M до ребра двугранного угла. Тогда $|MM_1| = r \operatorname{tg} \alpha$.

Таким образом, искомая сумма есть сумма расстояний от точки M до рёбер основания, умноженная на тангенс двугранного угла при основании. Но сумма расстояний от точки внутри равностороннего треугольника до его сторон есть постоянная величина, равная высоте равностороннего треугольника (это можно доказать, рассмотрев площадь равностороннего треугольника как сумму площадей трёх треугольников с вершиной в точке M).

б) Если отказаться от условия правильности пирамиды, то придём к отысканию максимума и минимума выражения $r_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + r_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + r_3 \operatorname{tg} \alpha_3$, где смысл обозначений понятен из решения п. «а», r_1, r_2, r_3 связаны тождеством $r_1a_1 + r_2a_2 + r_3a_3 = 2S$, где a_1, a_2, a_3 — стороны основания, S — его площадь.

Эта задача отыскания максимума и минимума линейной комбинации трёх переменных с фиксированной суммой легко решается, если воспользоваться геометрической интерпретацией. Взяв две переменные за независимые, придём к отысканию максимума линейной функции двух переменных на прямоугольнике.

Другим путём обобщения утверждения задачи может быть его распространение на правильные n-угольные пирамиды ($n \geqslant 4$). Доказательство постоянства такой суммы остаётся неизменным.

23.21. Эта задача решается аналогично задаче **22.14** рассмотрением развёрток пирамиды. О т в е т: кратчайшее расстояние по поверхности равно длине ребра.

23.22. Заметим прежде всего, что сечение представляет собой равнобедренную трапецию $ACST$ (рис. 30). Действительно, $AC \parallel ST$ как линии пересечения параллельных плоскостей. Равнобедренность трапеции следует из симметричности пирамиды относительно плоскости BDD_1B_1. Случаи треугольных сечений примем за вырожденные трапеции. Кроме того, отметим, что сечения будут равны при одинаковых расстояниях от точки K до B_1 или D_1.

Поэтому в дальнейших рассмотрениях

$$x \in \left[0;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

Пусть теперь O и O_1 — центры оснований пирамиды. Тогда KO — высота трапеции сечения. Из прямоугольного треугольника KO_1O находим $|KO| = \sqrt{|OO_1|^2 + |KO_1|^2}$.

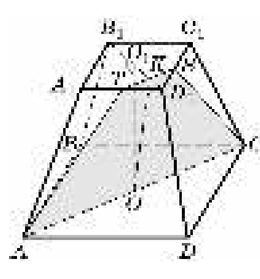

Рис. 30

Кроме того, из подобия треугольников $A_1B_1C_1$ и TB_1S имеем $|TS| = 2x$.

Найдём высоту усечённой пирамиды. Для этого опустим перпендикуляр A_1H и из прямоугольного треугольника A_1HA найдём $|A_1H| = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Таким образом, $|OO_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Отсюда

$$|KO| = \sqrt{1 - x\sqrt{2} + x^2}.$$

Тогда можно найти и длину бокового ребра трапеции:

$$|AT| = \sqrt{|KO|^2 + \left(\frac{|AC| - |TS|}{2}\right)^2} = \sqrt{2x^2 - 3\sqrt{2x} + 3}.$$

Итак, периметр сечения $P(x) = 2\sqrt{2} + 2x + 2\sqrt{2x^2 - 3\sqrt{2x} + 3}$, а площадь $S(x) = (x + \sqrt{2})\sqrt{1 - x\sqrt{2} + x^2}$. Формулы для $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right]$ получаются заменой x на $\sqrt{2} - x$.

Взяв производную от функции $P(x)$ и найдя её единственный корень $x = \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ на отрезке изменения x, получаем $P_{\min} = P\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{7+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Сравнивая значения P и $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, получаем $P_{\max} = P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 + 3\sqrt{2}$.

Поступая аналогично с функцией $S(x)$, получаем:

$$S_{\min} = S\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{5\sqrt{5}}{8},\quad S_{\max} = S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}.$$

23.23. а) Рассмотрим тетраэдр $ABCD$. Если к каждой его вершине примыкает тупой плоский угол, то к каждой вершине примыкает ровно один плоский угол (так как всего тупых плоских углов не более четырёх — не более одного в каждой грани).

Пусть AB — самое длинное ребро тетраэдра. Тогда тупыми будут углы ADB и ACB, при этом однозначно определяются два оставшихся тупых угла — углы DAC и DBC (в треугольнике не может быть двух тупых углов). Запишем неравенства о том, что сумма квадратов сторон, заключающих тупой угол, меньше квадрата третьей стороны, для всех граней и сложим эти неравенства. Получим:

$$|AC|^2 + |AD|^2 + |BC|^2 + |BD|^2 < |AB|^2 + |CD|^2. \qquad (*)$$

Итак, получилось, что сумма квадратов двух противоположных сторон тетраэдра больше суммы квадратов оставшихся сторон.

Докажем, что это неверно. Для этого рассмотрим сопровождающий параллелепипед данного тетраэдра. Пусть x, y, z — длины его рёбер, выходящих из одной вершины. Заметим, что отрезки, равные и параллельные скрещивающимся рёбрам тетраэдра, являются диагоналями грани параллелепипеда. Тогда сумма их квадратов равна сумме квадратов сторон этой грани. Следовательно, неравенство (*) превращается в такое: $2(y^2 + z^2) + 2(x^2 + z^2) < 2(x^2 + y^2)$, что неверно.

Возможно и другое доказательство, основанное на «неравенстве треугольника» для трёхгранного угла. В самом деле, как было показано ранее, к каждой вершине примыкает ровно один тупой плоский угол. Сумма прилежащих к этой же вершине острых углов больше, чем указанный тупой угол, т. е. больше 90°. Тогда сумма всех острых углов нашего тетраэдра больше $4 \cdot 90° = 360°$, а сумма всех плоских углов (включая четыре тупых угла) больше чем 720°, что невозможно.

б) Доказательство будем вести от противного. Пусть не все плоские углы тетраэдра острые. Рассмотрим случаи:

1) Есть вершина, при которой один из плоских углов (обозначим его α) не острый, а два других (обозначим их β и γ) острые. Применим теорему косинусов для трёхгранного угла:

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} < 0,$$

так как числитель дроби будет отрицателен, а знаменатель — положителен.

2) Есть вершина, при которой два плоских угла не острые (назовём их α и β), а третий острый (назовём его γ). Пусть $\alpha \geqslant \beta$. Тогда

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} < \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} \leqslant 0.$$

(Здесь использовано то, что $\cos\beta \leqslant 0$, и убывание косинуса.)

3) Пусть при некоторой вершине все плоские углы не острые. Тогда

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} < 0.$$

Полученные в каждом из этих случаев противоречия заканчивают доказательство.

Верность доказанного утверждения следует также из двойственной теоремы косинусов. Имеем:

$$\cos\gamma = \frac{\cos C + \cos A\cos B}{\sin A\sin B}.$$

Так как числитель и знаменатель указанной дроби положительны, угол γ острый.

Обратное утверждение неверно. Возьмём плоский острый угол с проведённой в нём биссектрисой и чуть-чуть «вытянем» эту биссектрису над плоскостью угла (рис. 31). Получился трёхгранный угол с острыми плоскими углами и тупым двугранным углом. Ясно, что его можно пересечь плоскостью так, что

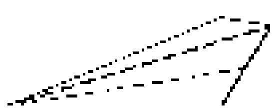

Рис. 31

отсекаемые на его гранях треугольники будут остроугольны. «Вытягивая» биссектрису ещё выше, добьёмся того, что и треугольник сечения будет остроугольным. Тот же самый пример можно получить из прямого трёхгранного угла, опуская одно из его рёбер к плоскости, пересекающей этот трёхгранный угол. Двугранный угол при этом ребре станет тупым, а остальные плоские углы можно сделать острыми.

23.24. Заметим, что отрезки, соединяющие середины скрещивающихся рёбер тетраэдра, пересекаются в одной точке, делясь в ней пополам. Этот факт можно доказать, взяв две пары скрещивающихся рёбер и последовательно соединив их середины. Полученный четырёхугольник будет параллелограммом (его стороны параллельны третьей паре скрещивающихся рёбер как средние линии граней), а указанные отрезки — его диагоналями. Тем самым все такие отрезки пересекаются в их общей середине, а значит, и указанные сечения, содержащие эти отрезки, также пересекаются в этой точке.

Отметим, что указанная точка есть не что иное, как центр сопровождающего параллелепипеда (так как отрезки, соединяющие середины скрещивающихся рёбер, являются отрезками между центрами противоположных граней параллелепипеда). Плоскости указанных в условии сечений пересекают параллелепипед по диагональным параллелограммам.

23.25. Пусть в тетраэдре $ABCD$ высота DH попадает в ортоцентр H грани ABC. Тогда $DHC \perp AB$, откуда $DC \perp AB$. Рассмотрев плоскости, проходящие через остальные высоты треугольника ABC, убеждаемся, что в нашем тетраэдре любая пара противоположных рёбер перпендикулярна.

Опустим в тетраэдре высоту AG на грань BCD. Заметим, что $ADG \perp BC$, так как $AD \perp BC$ и $AG \perp BC$. Но тогда и $DG \perp BC$, т. е. прямая DG содержит высоту грани BCD. Аналогично показывается, что и остальные прямые, соединяющие вершины грани с точкой G, содержат высоты, т. е. точка G — ортоцентр грани BCD. Аналогично поступим со всеми остальными гранями.

Тетраэдр с рассмотренными свойствами называется *ортоцентрическим* и обладает некоторыми интересными свойствами:

1) его скрещивающиеся рёбра перпендикулярны;

2) суммы квадратов скрещивающихся рёбер одинаковы (это следует из п. 3 по теореме Пифагора применительно к одной из граней сопровождающего параллелепипеда);

3) все рёбра сопровождающего параллелепипеда равны (это следует из п. 1);

4) высоты пересекаются в одной точке;

5) высоты падают в ортоцентры граней.

Все эти свойства являются также и признаками ортоцентрического тетраэдра, т. е. эти свойства равносильны.

23.26. Этот факт, очевидно, следует из того, что правильная n-угольная пирамида переходит в себя при поворотах на $\dfrac{360^\circ}{n}$ вокруг высоты. Тогда и проекции центра основания на грани (рёбра) также переходят друг в друга. Это значит, что они расположены в одной плоскости, перпендикулярной высоте (так как являются образами одной точки при поворотах вокруг высоты), и образуют правильный n-угольник.

23.27. а) Любое количество от 0 до 4. Соответствующие примеры легко построить.

б) Любое количество от 0 до 4. Соответствующие примеры легко построить. Отметим только, что пример тетраэдра с четырьмя прямоугольными гранями строится на двух перпендикулярных скрещивающихся прямых. Одно из рёбер тетраэдра — общий перпендикуляр этих прямых.

в) Также любое количество от 0 до 4. Соответствующие примеры легко построить. Отметим только, что построить тетраэдр с четырьмя тупоугольными гранями можно так: взять тупоугольный треугольник, отметить в нём точку, из которой все стороны видны под тупыми углами, после чего чуть-чуть приподнять эту точку над плоскостью треугольника. От этого плоские углы при этой точке изменятся лишь немного, т. е. могут остаться тупыми.

23.28. Нет. Рассмотрим два равных треугольника ABC и ABC_1 с общей стороной AB, не лежащие в одной плоскости. На продолжении отрезка CC_1 за точку C_1 возьмём произвольную точку D. Тетраэдр $ABCD$ с сечениями, проведёнными параллельно плоскости ABC_1 между этой плоскостью и точкой D, даёт искомый контрпример.

23.29. Да, такой тетраэдр существует. Для его построения возьмём два треугольника: один со сторонами 7, 6, 4, другой со сторонами 7, 5, 3. Совместим их равными сторонами на плоскости так, чтобы вершина одного оказалась внутри другого. Подсчитаем расстояние между свободными вершинами треугольников (оно равно $\sqrt{61 - 15 \cdot \dfrac{299 + 9\sqrt{85}}{98}}$) и убедимся, что оно меньше 2. Заставим один из треугольников поворачиваться вокруг стороны, длина которой равна 7, до тех пор, пока расстояние между свободными вершинами не станет равным 2. Искомый тетраэдр построен.

23.30. В тетраэдре в одной точке могут пересекаться либо две, либо все четыре высоты.

Две высоты пересекутся, если в тетраэдре есть ровно два перпендикулярных скрещивающихся ребра. В этом случае высоты разбиваются на пары, выходящие из концов одного из этих рёбер. Высоты в одной паре, очевидно, пересекаются, так как являются высотами треугольника — сечения тетраэдра плоскостью, перпендикулярной одному из этих рёбер и проходящей через другое ребро (рис. 32).

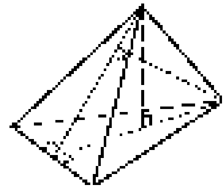

Рис. 32

По этой же причине если есть две пары перпендикулярных скрещивающихся рёбер, то все высоты пересекаются в одной точке (так как они попарно пересекаются и не лежат в одной плоскости), а тогда и третья пара скрещивающихся рёбер перпендикулярна. Получился ортоцентрический тетраэдр (см. решение задачи **23.25).**

В этом решении под высотами понимаются прямые, содержащие высоты треугольников или тетраэдров.

23.31. а) Этот тетраэдр *равногранный* (т. е. его грани равны как треугольники). У него есть огромное количество свойств, которые довольно легко доказываются. Приведём некоторые из них:

1) все грани тетраэдра равны;

2) скрещивающиеся рёбра попарно равны;

3) все трёхгранные углы равны;

4) противолежащие двугранные углы равны;

5) два плоских угла, опирающиеся на одно ребро, равны;

6) сумма плоских углов при каждой вершине равна 180°;

7) развёртка тетраэдра — треугольник;

8) сопровождающий параллелепипед прямоугольный;

9) тетраэдр имеет три оси симметрии (см. также решение задачи **42.5**);

10) общие перпендикуляры скрещивающихся рёбер попарно перпендикулярны;

11) средние линии (т. е. отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер) попарно перпендикулярны;

12) периметры граней равны;

13) площади граней равны;

14) высоты тетраэдра равны;

15) отрезки, соединяющие вершины с центром тяжести противоположных граней, равны;

16) радиусы описанных около граней окружностей равны;

17) центр тяжести тетраэдра совпадает с центром описанной сферы;

18) центр тяжести тетраэдра совпадает с центром вписанной сферы;

19) центр описанной сферы совпадает с центром вписанной;

20) вписанная сфера касается граней в центрах описанных около граней окружностей;

21) сумма косинусов всех двугранных углов равна 2.

б) Некоторые свойства такого тетраэдра перечислены в решении задачи **23.25.**

в) Это тетраэдр из п. «а».

г) Ясно, что этот тетраэдр ортоцентрический (одна из высот падает в вершину прямого угла, т. е. ортоцентр прямоугольного треугольника). Кроме того, непосредственным подсчётом можно убедиться, что квадрат площади грани, не являющейся прямоугольным треугольником, равен сумме квадратов площадей оставшихся граней. Также легко видеть, найдя стороны грани, не являющейся прямоугольным треугольником, и сравнив квадрат одной из них с суммой квадратов двух других, что эта грань обязательно будет остроугольным треугольником.

д) Это эквивалентно тому, что тетраэдр ортоцентрический (см. решение задачи **23.25).**

23.32. Если развёртка тетраэдра — треугольник, то этот тетраэдр равногранный, а значит, перегибать нужно по средним линиям треугольника. Если взять прямоугольный равнобедренный треугольник, то при сгибании получится вырожденный тетраэдр — дважды накрытый четырьмя треугольниками квадрат. Если же взять тупоугольный треугольник, то развёртка вовсе не сложится. Возле каждой вершины тетраэдра будут все углы исходного треугольника. Если один из них тупой, то он больше суммы двух других, что противоречит «неравенству треугольника» для трёхгранного угла.

23.33. Да. Нужно соединить вершину квадрата с серединами сторон, не проходящих через эту вершину.

23.34. Да, так как все линейные размеры тетраэдра будут известны и положение точек на гранях также задано.

23.35. Пусть $PABCD$ — данная пирамида, $PA \perp ABC$. В этой задаче есть три различных случая расположения рёбер с известными длинами:

1) $|PA| = d_1$, $|PB| = d_2$. Тогда сторона квадрата находится из прямоугольного треугольника PAB, после чего найти все остальные рёбра не составляет труда;

2) $|PB| = d_1$, $|PC| = d_2$. Тогда составим систему уравнений, воспользовавшись теоремой Пифагора в треугольниках PAB и PAC:

$$d_1^2 = x^2 + y^2, \quad d_2^2 = 2x^2 + y^2.$$

Здесь x — длина стороны основания, $y = |PA|$. Решив систему, найдём сторону квадрата и высоту, а также ребро $|PD| = |PB| = d_1$;

3) $|PA| = d_1$, $|PC| = d_2$. В этом случае находим из теоремы Пифагора в треугольнике PAC диагональ квадрата, а затем его сторону и все остальные рёбра.

Случай $|PD| = d_1$, $|PB| = d_2$ или обратный невозможен, так как $|PD| = |PB|$.

23.36. Будем пользоваться фактами, доказанными в задаче **23.9.**

Так как вершина проектируется в центр описанной окружности основания, то боковые рёбра пирамиды равны и наклонены под равными углами к основанию. Таким образом, боковые грани являются равнобедренными треугольниками. Однако они не равны, и углы наклона боковых граней к основанию различны.

Эта пирамида имеет часть элементов симметрии: две плоскости симметрии (проходящие через вершину и середины противоположных сторон основания), а также ось симметрии — высоту.

Если в основании пирамиды — ромб, то боковые грани наклонены под равными углами к плоскости основания. У этой пирамиды имеются также две плоскости симметрии (проходящие через вершину и диагонали основания) и ось симметрии — высота.

Заметим, что если соединить середины сторон ромба, получится прямоугольник, а если соединить середины сторон прямоугольника, получится ромб. При этом центры прямоугольника и ромба будут совпадать. Поэтому каждой пирамиде с прямоугольником в основании соответствует пирамида с ромбом и наоборот. Элементы симметрии у этих пирамид одинаковы.

З а м е ч а н и е. В этом месте, подводя итог решению задач **23.10**, **23.11**, **23.17**, **23.36**, считаем необходимым проведение обобщающей лекции (учителя или, что предпочтительнее, ученика) либо семинара. Форма, естественно, зависит от уровня подготовки класса. Тема: «Некоторые важные виды пирамид и их свойства». В сообщениях рассматриваются:

1) пирамида, вершина которой проектируется в центр описанной окружности основания;

2) пирамида, вершина которой проектируется в центр вписанной окружности основания;

3) пирамида, боковое ребро которой перпендикулярно основанию;

4) пирамида, боковая грань которой перпендикулярна основанию.

Требуют обсуждения вопросы, связанные с наличием вписанных и описанных сфер, вычислением их радиусов. Эти вопросы непосредственно связаны с точкой падения высоты пирамиды.

Вызывают интерес и могут быть поставлены вопросы о верности обратных свойств, о различных соотношениях перпендикулярности граней пирамиды и т. д.

23.37. а) Найдём радиусы вписанной и описанной сфер через высоту и сторону основания правильной n-угольной пирамиды. Если сумма радиусов окажется меньше высоты, значит, центр вписанной сферы лежит под центром описанной, если наоборот, то и расположение обратное. Расстояние между центрами вычисляется по формуле $\rho = |R + r - h|$.

Пусть $SA_1A_2...A_n$ — правильная пирамида, H — основание высоты, H_1 — середина A_1A_2, M_1 — середина SH_1, O — центр описанной сферы, I — центр вписанной сферы (рис. 33).

Тогда из подобия прямоугольных треугольников получаем $\frac{R}{|SH_1|} = \frac{|SM_1|}{|SH|}$. Подставив известные величины и найдя $|SH_1|$ из прямоугольного треугольника SHH_1, получим формулу: $R = \frac{h^2 + \frac{d^2}{4}\operatorname{ctg}^2 \frac{180^\circ}{n}}{2h}$.

Так как H_1I является биссектрисой треугольника SHH_1, причём $|IH| = r$, имеем по свойству биссектрисы $\frac{h - r}{r} = \frac{|SH_1|}{|HH_1|}$.

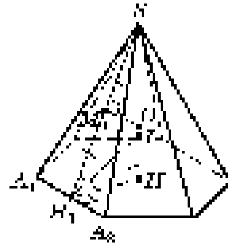

Рис. 33

Отсюда найдём $r = \dfrac{dh \operatorname{ctg} \dfrac{180^\circ}{n}}{\sqrt{4h^2 + d^2 \operatorname{ctg}^2 \dfrac{180^\circ}{n}} + d^2 \operatorname{ctg} \dfrac{180^\circ}{n}}$.

б) Если центры сфер совпадают, то это значит, что $R + r = h$. Подставив найденные значения радиусов и поделив на h обе части уравнения, получим иррациональное уравнение относительно $\dfrac{d}{h}$, сводящееся к тому, что $\dfrac{h}{d} = \sqrt{2} \operatorname{ctg} \dfrac{180^\circ}{n}$. Зная соотношение между d и h, можно найти плоский угол при вершине. Для этого достаточно выразить $|SH_1| = \dfrac{d \operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{2}}{2}$ из прямоугольного треугольника SH_1A_1 (α — искомый плоский угол при вершине) и $|SH_1| = \sqrt{h^2 + d^2 \operatorname{ctg}^2 \dfrac{180^\circ}{n}}$ из прямоугольного треугольника SHH_1. Решив уравнение, получим $\operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{2} = 3 \operatorname{ctg} \dfrac{180^\circ}{n}$.

23.38. Разумеется, по площади боковой грани невозможно найти площадь сечения пирамиды, так как неизвестны характеристики этого сечения. Однако заметим, что по площади боковой грани нельзя определить даже параметры пирамиды (так как фиксировано лишь произведение стороны основания и апофемы, но не они сами).

23.39. Развёртка с точностью до симметрии может быть трёх различных видов (рис. 34). Тогда встаёт вопрос для каждого вида: как экономнее разместить наибольшую из развёрток внутри квадрата? Остаётся лишь посчитать площади отходов и выяснить, что наиболее экономной является третья развёртка.

23.40. В обоих пунктах достаточно измерить длины всех рёбер тетраэдра. Тогда, пользуясь теоремой косинусов в треугольнике, вычисляем величины плоских углов. Зная в трёхгранном угле величины плоских

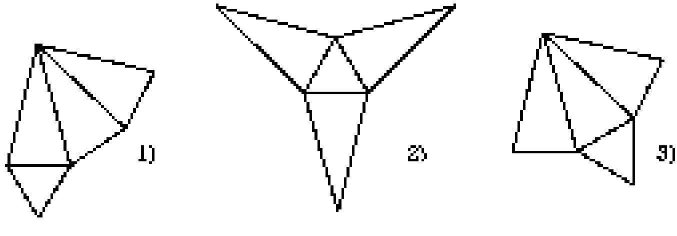

Рис. 34

углов, нетрудно найти по теореме косинусов двугранный угол (п. «б») и угол между ребром трёхгранного угла и плоскостью противоположной грани (п. «а»).

Если же разрешено измерять и углы, то можно обойтись замерами трёх плоских углов, прилежащих к одной вершине.

23.41. Расстояние от точки вылета до местонахождения каждой вороны пропорционально времени. Тогда положения ворон в разные моменты времени гомотетичны. Значит, если вороны были в одной плоскости в какой-то момент времени, то они будут в одной плоскости и в любой другой момент времени.

23.42. Обозначим данный треугольник через PQR и рассмотрим P_1, Q_1, R_1 — точки пересечения прямых AP, AQ, AR соответственно с плоскостью β. В зависимости от взаимного расположения точки A и плоскостей (рис. 35) имеем три варианта ответа, получаемые из подобия пирамид $APQR$ и $AP_1Q_1R_1$:

$$1)\ S_1=\left(\frac{d_1+d_2}{d_1}\right)^2 S;\qquad 2)\ S_1=\left(\frac{d_1}{d_2-d_1}\right)^2 S;$$

$$3)\ S_1=\left(\frac{d_1-d_2}{d_1}\right)^2 S.$$

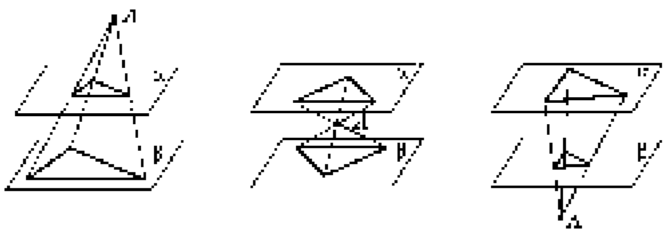

Рис. 35

23.43. Будем последовательно доказывать утверждение задачи, переходя от частных случаев расположения плоскости сечения к более общим.

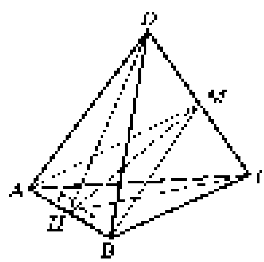

Рис. 36

Пусть сначала плоскость треугольного сечения ABM тетраэдра $ABCD$ проходит через ребро AB (рис. 36) и пусть $DC\perp AB$. Тогда высота в грани ABC из точки C и высота в грани ABD из точки D попадают в одну точку H на AB (см. решение задачи **23.25**). Туда же попадает и высота из вершины M сечения на сторону AB.

Значит, $|MH| = \sqrt{|MA|^2 - |AH|^2}$. Однако $|MA|$ меньше одной из длин сторон $|AC|$ и $|AD|$ (так как один из треугольников AMC или DMA является прямо- или тупоугольным с наибольшим углом именно при вершине M). Следовательно, одна из высот $|DH|$ или $|CH|$ будет больше $|MH|$ (так как её длина вычисляется по аналогичной формуле с заменой $|MA|$ на $|AD|$ или $|AC|$). Итак, в одной из граней ABC или ABD высота больше, чем в сечении. А значит, площадь, равная полупроизведению $|AB|$ на высоту, у этой грани тоже больше, чем у сечения.

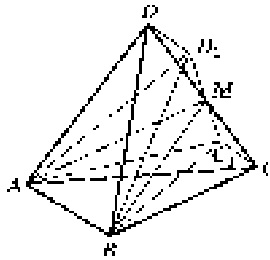

Рис. 37

Откажемся теперь от условия $DC \perp AB$. Рассмотрим прямую, перпендикулярную AB, проходящую через точку M и лежащую в плоскости, параллельной AB и проходящей через точки C и D. Такая прямая предъявляется построением прямых, параллельных AB и проходящих через точки C и D, после чего в плоскости, задаваемой этими прямыми, проводим перпендикуляр к указанным прямым через точку M. Пусть он пересекает эти прямые в точках C_1 и D_1 соответственно (рис. 37).

Сдвинем точку C в C_1, а точку D в D_1. Так как сдвиг происходил вдоль прямой, параллельной AB, площади граней, заключающих сечение, не изменились (так как не изменилась высота на AB). В новом тетраэдре ABC_1D_1 условие $D_1C_1 \perp AB$ выполнено, а значит, площадь сечения меньше одной из площадей изменённых граней, а тогда и в исходном тетраэдре выполнено то же неравенство.

Пусть теперь плоскость сечения AMN проходит только через вершину A. Тогда рассмотрим тетраэдр $ABCN$. Площадь ANM по доказанному выше не превосходит одной из площадей ABN или ACN. Первая из них меньше площади ABD, а вторая по доказанному выше меньше одной из площадей ACD или ABC.

Теперь рассмотрим треугольное сечение MNP, не проходящее через вершины тетраэдра. Тогда рассмотрим тетраэдр $AMNB$. По доказанному выше площадь сечения не превосходит одной из площадей BMN или AMN. Каждая же из этих двух площадей не превосходит одной из площадей граней.

§ 24. Выпуклые многогранники

Такой параграф впервые появился в школьном учебнике по геометрии в столь серьёзном виде и на таком уровне строгости. В п. 24.1 разбирается вопрос о равносильности определений выпуклого многогранника, который обычно оставался без доказательства. Такое же рассуждение можно провести и для выпуклых многоугольников, а затем воспользоваться полученным результатом для доказательства некоторых теорем п. 24.3, 24.4 от противного. Авторы предпочли более красивый путь. Часть свойств выпуклого многогранника, а также характеристики выпуклого многогранника приведены в задачах.

Дополнение к § 24 о выпуклых оболочках полезно изучить в классах с высоким уровнем математической культуры. Материал приложения можно использовать для самостоятельного изучения либо для организации семинара.

Для изучения темы полезно ещё раз вспомнить, что такое грань, пересечение, граница и т. д.

Задачи к § 24

Задача **24.3б** является пропедевтической при изучении теоремы Эйлера. После многочисленных неудачных попыток построения такого многогранника (полезно рассмотреть икосаэдр с усечёнными вершинами, у которого имеются 60 вершин и 32 грани) приходим к необходимости доказать не существование такого многогранника, для чего нужны какие-то соотношения между количествами вершин и граней.

В пп. «в» и «г» даны доказательства как с использованием теоремы Эйлера, так и без неё. Целесообразно при изучении теоремы Эйлера вернуться к решениям этих задач.

24.2. Из свойств выпуклых тел известно, что существуют две параллельные опорные плоскости, перпендикулярные диаметру и проведённые через его концы. Значит, эти плоскости пересекаются с многогранником только по вершине. Действительно, пусть M и N — концы диаметра и пусть существует другая точка пересечения P одной из плоскостей (например, проходящей через N) с многогранником. Тогда так как плоскости были перпендикулярны MN, то $|MP| > |MN|$, что противоречит тому, что MN — диаметр.

Итак, указанные опорные плоскости пересекают многогранник только в вершинах. Значит, диаметр соединяет вершины многогранника.

24.3. а) Да. Примером может служить любая пирамида с выпуклым многоугольником в основании.

б) Такого выпуклого многогранника не существует. Чтобы доказать это, воспользуемся формулой Эйлера. Пусть e — количество вершин, k — количество рёбер и f — количество граней. Тогда если $e = 2f$, то из формулы Эйлера имеем:

$$3f - k = 2. \qquad (*)$$

С другой стороны, так как каждая вершина принадлежит не менее чем трём граням, получаем $3e \leqslant S$, где S — суммарное количество вершин в гранях, откуда с учётом того, что $e = 2f$, получаем $S \geqslant 6g$.

Заметим теперь, что суммарное количество вершин в гранях равно суммарному количеству рёбер в гранях. Так как каждое ребро принадлежит ровно двум граням, получаем $f = \dfrac{S}{2} \geqslant 3f$, что противоречит формуле (*).

в) Из формулы Эйлера следует, что в этом случае у многогранника должно быть только две вершины, что невозможно.

Этот же результат можно получить и без применения формулы Эйлера. Именно: рассмотрим многогранник и заметим, что каждое ребро принадлежит двум граням, а потому суммарное количество рёбер в гранях вдвое больше количества рёбер многогранника. Если рёбер в многограннике столько же, сколько граней, то суммарное количество рёбер в гранях вдвое больше числа граней. Но суммарное количество рёбер в гранях хотя бы втрое больше числа граней (так как каждая грань имеет хотя бы три ребра).

Приведённое рассуждение показывает, что имеет место неравенство $k \geqslant \dfrac{3}{2}f$ (обозначения см. в п. «б»).

г) Из формулы Эйлера следует, что у данного многогранника должно быть лишь две грани, что невозможно.

Этот же результат можно получить и без применения формулы Эйлера рассуждением, аналогичным рассуждению из предыдущего пункта.

Действительно, каждая вершина многогранника является общей не менее чем для трёх рёбер, а каждое ребро соединяет две вершины. Поэтому имеем неравенство $e \leqslant \dfrac{2}{3}k$, что противоречит условию.

Заметим, что полученное неравенство аналогично неравенству из предыдущего пункта. Это не случайно. Возьмём на каждой грани по точке и соединим точки ребром, если ребром были соединены исходные грани. У полученного многогранника вершин столько же, сколько граней у исходного, рёбер столько же, сколько у исходного, а граней столько же, сколько вершин у исходного. Осталось применить для полученного многогранника неравенство из предыдущего пункта.

д) Да, такой многогранник существует. Например, возьмём куб, у которого вершины срезаны так, что на гранях остались серединные квадраты (кубооктаэдр). Тогда у такого многогранника будет 6 квадратных и 8 треугольных граней. Поставим теперь на квадратную грань кубик. Получилось 10 квадратных граней и 8 треугольных. Теперь приставим к одной из треугольных граней треугольную пирамидку. Получим 10 квадратных и 10 треугольных граней.

Более простой пример представлен на рисунке 38.

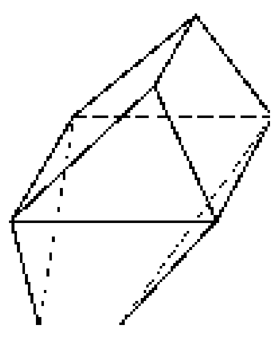

Рис. 38

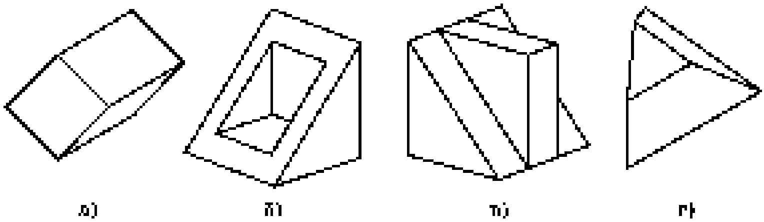

Рис. 39

24.4. О т в е т: а), г) Можно; б), в) нельзя. Аксонометрия этих фигур приводится на рисунке 39.

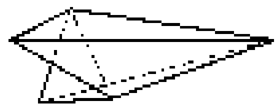

Рис. 40

24.6. Части, на которые плоскость разбивает выпуклый многогранник, являются пересечениями полупространств, ограниченных данной плоскостью, с выпуклым многогранником. Таким образом, они являются выпуклыми фигурами (как пересечения выпуклых фигур). Очевидно, что эти части являются многогранниками (проверяется по определению).

О б р а т н о е у т в е р ж д е н и е. Если при разбиении многогранника плоскостью части выпуклые, то он выпуклый — очевидно, является неверным (рис. 40).

Однако верно следующее утверждение: если любая плоскость разбивает многогранник на выпуклые многогранники, то исходный многогранник выпуклый. В противном случае существует отрезок, концы которого лежат внутри многогранника, но весь он в многограннике не лежит. Проведя через этот отрезок и какую-либо внутреннюю точку многогранника плоскость, получим невыпуклые части.

24.7. а) Да. Если какой-либо отрезок с концами, принадлежащими многограннику, не весь принадлежит многограннику, то сечение, проведённое через этот отрезок и какую-либо внутреннюю точку многогранника, не будет выпуклым.

б) Нет. Если в кубе вырезать куб с рёбрами, параллельными рёбрам исходного куба и существенно меньшими их по длине, то любая параллельная проекция полученного многогранника не будет отличаться от проекции исходного куба.

в) Да. Пусть многогранник невыпуклый. Тогда какая-то его вершина лежит внутри его выпуклой оболочки. Но выпуклая оболочка также вписана в ту же самую сферу. Она лежит внутри шара, ограниченного указанной сферой (за исключением вершин выпуклой оболочки). Тогда вершина внутри выпуклой оболочки не лежит на сфере.

г) Да. Действительно, покажем, что многогранник лежит по одну сторону от любой своей грани. Рассмотрим произвольную грань и полупространство, ограниченное этой гранью, в котором лежит вписанная сфера. Тогда в этом полупространстве будет лежать часть любой грани (так как в нём лежит точка касания грани и вписанной сферы). Остаётся заметить, что если часть многогранника лежит в другом полупространстве, то в нём должна полностью лежать одна из граней.

д) Да. Достаточно отметить, что все многогранные углы данного многогранника будут выпуклы, ибо их рёбрами будут образующие конической поверхности прямого кругового конуса (касательные к сфере из одной точки).

24.8. а) Нет. Если у многогранника есть нетреугольная грань, то сечение плоскостью, параллельной этой грани и достаточно близкой к ней, будет многоугольником с тем же числом сторон, что и рассматриваемая грань.

Пусть теперь все грани — треугольники. Если есть вершина, из которой выходит более трёх рёбер, то сечение плоскостью, близкой к этой вершине, не будет треугольником.

Очевидно, что единственным многогранником, у которого из каждой вершины выходят три ребра и все грани — треугольники, является тетраэдр (рассмотрим концы трёх рёбер, выходящих из одной вершины. Они должны соединяться рёбрами, иначе будет нетреугольная грань. Больше никаких рёбер нет, так как из всех вершин уже выходят по три ребра).

Доказательство закончено, так как у тетраэдра есть сечение, являющееся параллелограммом.

б) Нет. Рассмотрим диаметр многогранника и плоскость, проходящую через этот диаметр, такую, что есть две вершины многогранника по разные стороны от этой плоскости. Потом рассмотрим ортогональную проекцию многогранника на плоскость, перпендикулярную исходной и проходящую через диаметр. Диаметр будет лежать внутри соответствующего многоугольника — проекции, причём вершины диаметра будут вершинами этого многоугольника (иначе были бы точки на расстоянии, большем диаметра). Таким образом, этот многоугольник имеет диагональ, т. е. не является треугольником.

в) Нет. Если это выпуклый многогранник с квадратными гранями, то из каждой вершины выходят три ребра (если выходят хотя бы четыре, то сумма плоских углов при этой вершине не меньше 360°, что невозможно для выпуклого многогранного угла). Тогда многогранник является кубом.

24.9. Такой многогранник существует. Его грани получим, проводя плоскости через сторону одного треугольника и вершину другого и выбирая те из таких плоскостей, относительно которых оба треугольника лежат по одну сторону. То же построение для любых выпуклых многоугольников с одинаковым числом сторон.

24.10. Пусть в многограннике n граней. Пусть у всех таких граней разное число рёбер. Тогда у грани с наибольшим числом рёбер будет хотя бы $n + 2$ ребра, что невозможно, так как в этом случае грань граничит с $n + 42$ другими.

§ 25. Теорема Эйлера

Теорема Эйлера дана лишь для выпуклых многогранников, хотя выполняется для более широкого их класса (см. по этому поводу решение задачи **25.4).** Это связано с тем, что именно случай выпуклых многогранников можно доказательно изложить на школьном уровне.

Последовательность изложения может быть такой:

1) о понятии топологических свойств фигур;

2) составление таблиц количеств рёбер, граней и вершин известных многогранников и установление закономерности;

3) доказательство теоремы.

Другие способы доказательства и изложения теоремы Эйлера можно найти в книгах для учителей: Бескин Л. Н. Стереометрия / Л. Н. Бескин. — М., 1971; Фетисов А. И. Геометрия / А. И. Фетисов. — М., 1963. Материал для углублённого изучения и изложение смежных вопросов можно найти в книгах: Шашкин Ю. А. Эйлерова характеристика / Ю. А. Шашкин. — М., 1984; Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию / Г. С. М. Кокстер. — М., 1966.

Задачи к § 25

Кроме решения задач этого параграфа полезно вернуться к решению задачи **24.3**.

25.1. а) Да. Например, октаэдр.

б) Да. Например, усечённая четырёхугольная пирамида.

Если у многогранника 12 рёбер, то по формуле Эйлера имеем $e + f = 14$. Воспользуемся неравенствами, полученными при решении задачи **24.3**. Из указанных неравенств получим $e \leqslant \frac{2}{3}k = 8$, $f \leqslant \frac{2}{3}k = 8$. Тогда либо $e = f = 7$, либо $e = 6, f = 8$, либо $e = 8, f = 6$. Первый случай реализуется шестиугольной пирамидой, второй — октаэдром, третий — кубом. Аналогичное решение для случая многогранника с 15 рёбрами даёт ответы: $e = 7$, $f = 10$; $e = 8$, $f = 9$; $e = 9$, $f = 8$; $e = 10$, $f = 7$. Все указанные случаи реализуются (первые два — на рисунке 41, остальные им двойственны).

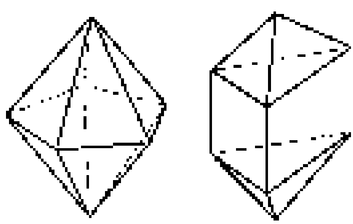

Рис. 41 $e = 7, f = 10$ $e = 6, f = 8$

25.2. О т в е т. См. хотя бы рисунок 70 учебника. Другой такой пример на рисунке 42 (в многограннике — сквозное отверстие в виде призмы).

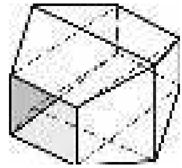

Рис. 42

25.3. Возьмём грань, являющуюся n-угольником. Тогда при пристраивании пирамиды появляются n новых граней и исчезает одна старая. Количество рёбер увеличивается на n, количество вершин увеличивается на 1. Нетрудно видеть, что величина $e - k + f$ не меняется.

Может возникнуть ситуация, когда многогранник перестанет быть выпуклым или две грани полученного многогранника лежат в одной плоскости.

25.4. Нетрудно проверить, что для данного многогранника выполняется формула Эйлера, откуда следует доказательство формулы Эйлера индукцией по числу граней в многограннике.

Отметим, чтобы для многогранника выполнялась формула Эйлера, необходимо и достаточно, чтобы любой замкнутый несамопересекающийся маршрут мог быть стянут в точку, двигаясь по поверхности многогранника. Пример многогранника, для которого условие не выполнено, представлен на рисунке 42.

25.5. Такого многогранника не существует. Действительно, пусть k_i — количество i-угольных граней. Зная, что каждое ребро принадлежит ровно двум граням, получаем $k = \frac{1}{2}\sum\limits_{i \geqslant 6} ik_i$. Тогда из формулы Эйлера имеем

$$e = 2 + k - f = 2 + 2k_6 + \frac{5}{2}k_7 + \ldots + \left(\frac{i}{2} - 1\right)k_1 + \ldots . \qquad (1)$$

С другой стороны, так как в каждой вершине сходятся не менее трёх граней, получаем неравенство:

$$e \leqslant \frac{1}{3}\sum_{i \geqslant 6} ik_i = 2k_6 + \frac{7}{3}k_7 + \ldots + \frac{i}{3}k_i + \ldots . \qquad (2)$$

Так как при $i > 6$ выполнено $\frac{i}{2} - 1 \geqslant \frac{i}{3}$, получаем, что правая часть (1) больше правой части (2) вопреки неравенству (2).

25.6. Пусть в обозначениях предыдущей задачи k_6 — количество шестиугольных граней, k_7 — количество семиугольных граней. Тогда $k_6 + k_7 = 200$. Количество рёбер равно $k = \frac{1}{2}(5 \cdot 100 + 6k_6 + 7k_7)$. Так как из каждой вершины выходят по три ребра, имеем для количества вершин формулу $e = \frac{1}{3}(5 \cdot 100 + 6k_6 + 7k_7)$. Тогда для k_6 и k_7 получим систему уравнений с использованием теоремы Эйлера. Её решением являются $k_6 = 112$, $k_7 = 88$.

25.7. Оценка $\frac{e}{k} \leqslant \frac{2}{3}$ была получена в решении задачи **24.3**. Равенство достигается в тетраэдре. Там же была получена оценка $\frac{f}{k} \leqslant \frac{2}{3}$. Равенство также достигается в тетраэдре. Более того, с помощью построения двойственного многогранника получаем из оценок для $\frac{e}{k}$ те же оценки для $\frac{f}{k}$.

Чтобы получить оценку снизу для $\frac{e}{k}$, напишем тождество Эйлера: $e - k + f = 2$ — и разделим его на k. Имеем: $\frac{e}{k} = \frac{2}{k} + 1 - \frac{f}{k}$. Воспользовавшись оценкой сверху для $\frac{f}{k}$, получим неравенство $\frac{e}{k} \geqslant \frac{2}{k} + \frac{1}{3}$, где равенство достигается в том случае, когда все грани — треугольники. Ясно, что существует многогранник, в котором все грани — треугольники, со сколь угодно большим количеством рёбер. Поэтому точной оценкой снизу является число $\frac{1}{3}$, но это значение не может быть достигнуто.

Деля оценки разного смысла для величин $\frac{e}{k}$ и $\frac{f}{k}$, получаем, что величина $\frac{e}{f}$ строго заключена между $\frac{1}{2}$ и 2.

Во всех случаях наиболее точными приближениями являются многогранники с треугольными гранями или те, из каждой вершины которых выходят ровно три ребра.

25.8. Пусть в многограннике каждая грань имеет хотя бы четыре ребра. Тогда из формулы Эйлера получаем:

$$e = 2 + k - f = 2 + k_4 + \frac{3}{2}k_5 + \ \dots \ + \left(\frac{i}{2} - 1\right)k_1 + \ \dots \ . \qquad (1)$$

Если же из каждой вершины выходит не менее четырёх рёбер, имеем

$$e \leqslant \frac{1}{4}\sum_{i \geqslant 4} ik_i = k_4 + \frac{5}{4}k_5 + \ \dots \ + \frac{i}{4}k_i + \ \dots \ . \qquad (2)$$

Так как при $i \geqslant 4$ имеет место $\frac{1}{4} \leqslant \frac{i}{2} - 1$, получаем противоречие между (1) и (2).

§ 26. Правильные и полуправильные многогранники

Изложение темы «Правильные многогранники» в этом параграфе существенно отличается от её изложения в учебниках других авторских коллективов.

1. Сначала показывается пять типов правильных многогранников.

2. Построением доказывается, что они существуют.

3. Через более общую теорему доказывается, что других выпуклых правильных многогранников нет.

Обычно же сразу после определения доказывалась теорема, а существование показывалось позже. Это усложняло методику изложения (например, название правильного многогранника появлялось до доказательства его существования и т. д.).

Особого внимания заслуживают п. 26.5 и 26.6, посвящённые правильным многогранным углам и полуправильным и звёздчатым многогранникам. Представляется разумным поощрить учащихся к изготовлению моделей как приведённых в учебнике, так и других полуправильных многогранников (по развёрткам, приведённым в книгах, упомянутых в параграфе). Можно также провести семинар, посвящённый полуправильным многогранникам.

Задачи к § 26

26.2. Заметим, что такая точка есть в кубе и она переходит в себя при всех самосовмещениях куба. Заметим далее, что все правильные многогранники строятся на основе куба. При самосовмещениях этих многогранников указанная точка остаётся на месте. Так как самосовмещениями правильных многогранников можно добиться того, чтобы любая грань перешла в другую, наперёд выбранную, получаем, что данная точка равноудалена от всех граней. Аналогично она равноудалена от всех вершин и всех рёбер.

26.3. При сечении многогранного угла плоскостью, не параллельной ни одной из его граней, получается пирамида. Как доказано в решении задачи **23.8**, сумма плоских углов при вершине пирамиды меньше 360°.

Это утверждение неверно для невыпуклого многогранного угла.

26.4. Проще всего найти двугранные углы во всех многогранниках, кроме икосаэдра и октаэдра, по теореме косинусов для трёхгранного угла. Для нахождения углов в икосаэдре и октаэдре воспользоваться их двойственностью додекаэдру и кубу.

Можно поступить и по-другому. В каждом многограннике (кроме тетраэдра и куба, в которых двугранные углы подсчитаны) взять центр O и опустить перпендикуляры OH_1 и OH_2 на две соседние грани. H_1 и H_2 — центры граней. Перпендикуляры из них на общее ребро попадают в его середину M. Тогда треугольник OH_1M прямоугольный и можно вычислить тригонометрическую функцию половины искомого угла.

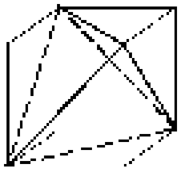

Рис. 43

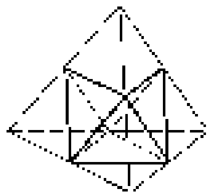

Рис. 44

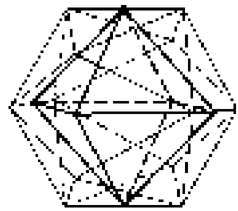

Рис. 45

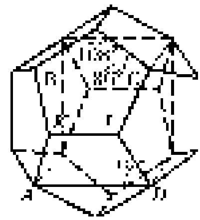

Рис. 46

26.5. а) Например, вершина куба и три противоположные ей в каждой из примыкающих граней будут вершинами тетраэдра (рис. 43).

б) Центры граней куба являются вершинами правильного октаэдра.

в) Середины рёбер тетраэдра являются вершинами правильного октаэдра (рис. 44).

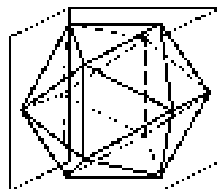

Рис. 47

г) Середины трёх пар противоположных взаимно перпендикулярных рёбер икосаэдра являются вершинами правильного октаэдра (рис. 45).

д) Рисунок 46.

е) Разобьём грани куба на пары параллельных. Возьмём в каждой паре граней средние линии так, чтобы в одной паре они были параллельны, а в разных — перпендикулярны. На каждой средней линии возьмём по две точки симметрично относительно центра грани. Эти точки будут вершинами икосаэдра. Осталось вычислить длину ребра икосаэдра, чтобы он был правильным. Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник с вершинами в конце ребра икосаэдра, в середине перпендикулярного ему ребра куба и в центре смежной грани куба (рис. 47). Если x — ребро икосаэдра, a — ребро куба, то по теореме Пифагора

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-x}{2}\right)^2 = \frac{3x^2}{4},$$

откуда $x = a\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Найденная величина будет расстоянием между вершинами в одной грани куба.

26.6. Заметим, что рёбра правильного икосаэдра разбиваются на пары параллельных. Поэтому нахождение углов между рёбрами сведётся либо к нахождению угла между рёбрами с общей вершиной (либо это угол 60°, либо он может быть найден по теореме косинусов для трёхгранного угла), либо к нахождению угла между рёбрами правильного пятиугольника. Аналогично решается и п. «б». Действительно, грани икосаэдра также разбиваются на пары параллельных. Поэтому задача всегда сводится к нахождению угла между ребром и гранью, имеющими общую вершину. Таким же образом решается п. «в».

26.7. Рассмотрим три точки на рёбрах многогранного угла, такие, что плоскость, заданная этими тремя точками, не параллельна ни одному ребру (такие точки существуют, так как для двух данных точек существует не более одной плоскости, проходящей через эти точки и параллельной данному ребру). Покажем, что эта плоскость пересекает именно рёбра угла, а не их продолжения. В противном случае рассмотрим первое ребро (считая от трёх данных), которое не пересечено нашей плоскостью. Тогда многогранный угол лежит по обе стороны от грани, образованной этим ребром и предыдущим, вопреки выпуклости.

Для невыпуклого угла это утверждение неверно.

Отметим, что утверждением этой задачи мы пользовались при доказательстве в задаче **26.3**.

26.8. Проведём плоскость, параллельную обеим линиям пересечения плоскостей противоположных граней и пересекающую все рёбра угла (такая плоскость существует, достаточно провести её через точку на любом ребре). Линии пересечения этой плоскости с противоположными гранями параллельны, так как параллельны ребру пересечения этих плоскостей. Значит, в сечении получился параллелограмм.

26.9. Заметим, что каждое ребро образует равные углы с соседними рёбрами. Значит, оно проектируется на плоскость, заданную соседними рёбрами, в биссектрису угла между ними. В неё же проектируется и противоположное ребро. Тогда эти рёбра лежат в одной плоскости, перпендикулярной плоскости, образованной двумя другими рёбрами.

Обратное утверждение неверно. Достаточно взять пирамиду, в основании которой лежит четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями, в точку пересечения которых падает высота.

26.10. Да, такая точка есть. Она находится на высоте к данной грани на расстоянии $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ этой грани, как показывают несложные вычисления.

26.11. а) Да. Из равенства периметров боковой грани и основания следует с учётом равнобедренности боковой грани равенство всех рёбер.

б) Да. Из сравнения площадей боковой грани и основания следует равенство высот.

Можно было использовать тот факт, что если грани тетраэдра равновелики, то они равны как треугольники. Это упоминалось в решении задачи **23.31**.

в) Да. Треугольник, являющийся сечением пирамиды плоскостью, проведённой через высоту к основанию пирамиды и одну из боковых высот, будет равнобедренным. Это означает, что высота в боковой грани равна высоте в основании.

г) Нет. В любой правильной пирамиде высоты пересекаются в одной точке, так как вершина проектируется в ортоцентр основания (см. решение задачи **23.25**).

д) Да. В решении задачи **23.37** показано, что при совпадении центров вписанной и описанной сфер в правильной n-угольной пирамиде имеет место равенство $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = 3\operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}$ (α — плоский угол при вершине), откуда при $n = 3$ получаем $\alpha = 60^\circ$.

е) Нет. Сечение, являющееся квадратом, имеется в любой правильной пирамиде. Это сечение плоскостью, параллельной скрещивающимся рёбрам (они перпендикулярны). Двигая это сечение параллельно себе, получаем из принципа непрерывности существование квадратного сечения.

ж) Да. Как показано в задаче **23.31**, если развёртка тетраэдра есть треугольник, то тетраэдр равногранный. Тогда правильная треугольная пирамида является правильным тетраэдром.

з) Да. Для доказательства проведём высоту из вершины основания на боковую грань. Все три ребра, заключающие эту высоту, равны (из равенства прямоугольных треугольников по катету и острому углу). Но среди этих рёбер есть и боковое ребро, и ребро основания. Значит, все рёбра пирамиды равны, т. е. она является правильным тетраэдром.

и) Да. Если все двугранные углы трёхгранного угла равны, то и плоские углы равны (это следует, например, из теоремы косинусов для трёхгранного угла). Тогда боковая грань есть равнобедренный треугольник с углом 60°, т. е. равносторонний треугольник.

26.12. а) Да. Составим систему уравнений для сторон прямоугольного параллелепипеда x, y, z (a — длина диагонали боковой грани):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ y^2 + z^2 = a^2, \\ z^2 + x^2 = a^2, \end{cases}$$

откуда $x = y = z$.

б) Да. Тогда длины диагоналей граней равны длине главной диагонали, умноженной на косинусы равных углов, т. е. равны друг другу. Остаётся воспользоваться результатом предыдущего пункта.

в) Не всегда. Фактически в задаче спрашивается, всякий ли изображаемый правильным шестиугольником прямоугольный параллелепипед есть куб. Рассмотрим правильный шестиугольник (рис. 48). В выделенный четырёхугольник с диагоналями может быть спроектирован *любой* тетраэдр AA_1BC *любого* параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а не только куба. Дальнейшее изображение параллелепипеда восстановится однозначно.

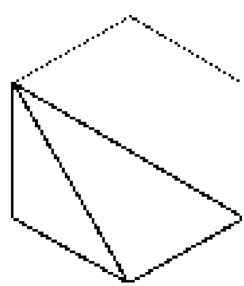

Рис. 48

26.13. Сформулируем более явно указанные условия: 1) грани — правильные многоугольники; 2) грани равны между собой; 3) равны друг другу углы между соседними гранями.

Построим примеры многогранников, не являющихся правильными, для которых выполнены любые два из этих трёх условий.

В качестве контрпримера можно взять два правильных тетраэдра, приложенных основаниями друг к другу.

Пусть выполнены условия 2 и 3. Рассмотрим куб и построим на каждой его грани как на основании маленькую по высоте правильную пирамиду (все пирамиды одинаковы). Начнём теперь увеличивать высоту каждой пирамиды. Ясно, что из соображений непрерывности наступит момент, когда грани пирамид, соседних по ребру, сольются в одной плоскости. Полученный многогранник, все грани которого являются ромбами, и будет искомым примером.

Пусть теперь выполнены условия 1 и 3. Примером в этом случае служит кубооктаэдр. Он является общей частью подходящим образом подобранных куба и октаэдра, расположенных так, что центры их совпадают и диагонали октаэдра перпендикулярны граням куба.

Итак, выполнение какой-либо пары условий недостаточно для того, чтобы многогранник был правильным.

26.14. Примером в обоих пунктах служит крестовидный многогранник, полученный пристраиванием к каждой грани данного куба равного ему куба.

26.15. Простор для фантазии при решении этой задачи поистине безграничен. Разумеется, выполнение всех условий задачи **26.11** достаточно для того, чтобы произвольный тетраэдр был правильным. Например, если все двугранные углы равны (п. «и»), то и плоские углы в трёхгранном угле равны. Тогда все плоские углы тетраэдра одинаковы, т. е. он правильный.

Заметим, что в решении задачи **23.31** отмечено, что условия *а*, *б*, *в*, *д*, *ж* задачи **26.11** равносильны тому, что грани тетраэдра равны как треугольники. Поэтому пары, составленные из этих условий, не будут характеризовать правильный тетраэдр.

Любое же из этих условий вкупе с условием *г* выделит среди всех тетраэдров правильные. Действительно, одной из характеристик равногранного тетраэдра было то, что противоположные рёбра его равны. В то же время условие *и* означает, что тетраэдр ортоцентрический, т. е., в частности, что суммы квадратов противоположных рёбер равны. Из этого следует, что все рёбра тетраэдра равны.

Условие *з* является достаточным для того, чтобы тетраэдр был правильным. Действительно, каждая вершина проектируется в центр описанной окружности основания, при этом боковые рёбра равны. Тогда тетраэдр правильный (причём достаточно рассмотреть только три вершины).

26.16. Кубом является, например, такой параллелепипед, у которого концы рёбер, выходящих из одной вершины, являются вершинами правильного треугольника. Если в параллелепипед можно вписать сферу и вокруг него можно описать сферу, то этот параллелепипед — куб.

Впрочем, и в этой задаче большой простор для фантазии учащегося.

26.17. Проекции центра многогранника на его грани являются вершинами двойственного правильного многогранника, так как это центры граней.

Проекции же центра куба на его рёбра образуют вершины уже упоминавшегося кубооктаэдра (это просто середины рёбер куба).

26.18. а) О т в е т: не более четырёх. Возьмём точки A_1, A_2, …, A_n на одинаковом расстоянии от точки P. Тогда будут равны попарные расстояния между этими точками. Если точек будет хотя бы пять, то любые четыре из них будут вершинами правильного тетраэдра. Но при этом есть только два правильных тетраэдра с данным основанием, их вершины вместе с двумя вершинами основания не являются вершинами правильного тетраэдра.

Пример четырёх лучей дают лучи из центра правильного тетраэдра в его вершины.

б) Также не более четырёх. Рассмотрим один из лучей (например, PA_1) и плоскость, перпендикулярную ему и проходящую через точку P. Тогда точки A_2, …, A_n лежат по другую сторону от этой плоскости, нежели точка A_1.

Рассмотрим два луча (например, PA_2 и PA_3) и покажем, что угол между их проекциями на проведенную плоскость будет также тупым. Для этого опустим перпендикуляры A_2H_2 и A_3H_3 на плоскость и обозначим для удобства вычислений длины получившихся отрезков: $|PA_2| = a$, $|PA_3| = b$, $|A_2A_3| = c$, $|A_2H_2| = h_2$, $|A_3H_3| = h_3$, $|PH_2| = a_1$, $|PH_3| = b_1$, $|H_2H_3| = c_1$.

Из условия следует, что $a^2 + b^2 < c^2$, так как угол A_2PA_3 тупой. Рассмотрим

$$a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 = a^2 - h_1^2 + b^2 - h_2^2 - (c^2 - (h_1 - h_2)^2) =$$
$$= a^2 + b^2 - c^2 - 2h_1h_2 < 0.$$

Итак, угол между проекциями этих лучей на плоскость, перпендикулярную одному из них, тупой. Если бы лучей было хотя бы пять, то на плоскости можно было провести четыре луча с попарно тупыми углами, что невозможно.

Пример лучей из центра правильного тетраэдра в его вершины показывает, что четыре таких луча существуют.

26.19. а) Нет. Рассмотрим правильную четырёхугольную пирамиду. Все плоские углы при её вершине равны 60°. Но можно рассмотреть и вырожденный четырёхгранный угол (угол 120° с дважды проведённой биссектрисой), плоские углы которого также равны 60°.

Вырожденный пример приведён в силу своей простоты. Нетрудно построить пример четырёхгранного угла с плоскими углами по 60°, рассчитав соответствующую четырёхугольную пирамиду с ромбом в основании.

б) Нет. Если бы можно было найти по двугранным углам плоские, то в двойственном четырёхгранном угле (образованном перпендикулярами на грани исходного угла из внутренней точки) можно было бы решить задачу п. «а».

в) Достаточно знать все плоские углы и один двугранный. Тогда из теоремы косинусов для трёхгранного угла находится диагональный плоский угол, затем ещё раз по теореме косинусов находится противоположный двугранный угол. Далее из этих же трёхгранных углов находятся величины частей двух других неизвестных двугранных углов, которые затем складываются.

г) Нет. Возникнут две возможные конфигурации в предыдущем решении (части углов нужно будет вычитать, а не складывать).

26.20. Да. Прежде всего узнаём по теореме косинусов в соответствующих треугольниках длины отрезков AB и BC. По теореме косинусов в трёхгранном угле с вершиной A узнаём величину плоского угла APC, после чего узнаём $|AC|$ и все плоские углы в треугольнике APC. Затем, применив теорему косинусов в трёхгранном угле с вершиной C и сторонами CP, CB, CA, узнаём величину двугранного угла при ребре CA и при ребре CP. Вычитая последний угол из известного двугранного угла при ребре PC четырёхгранного угла, узнаём двугранный угол при ребре CP в трёхгранном угле с вершиной C и сторонами CA, CP и CD. Теперь в трёхгранном угле с вершиной C и сторонами CA, CP и CD нам известны двугранные углы при рёбрах CA (он смежный с только что найденным), PC и плоский угол PCA. Тогда по теореме косинусов найдём плоский угол PCD, затем по теореме синусов в треугольнике PCD получим значение $|PD|$.

26.21. Сумма двугранных углов не может быть меньше 360°. Это следует из того, что сумма плоских углов двойственного четырёхгранного угла не превосходит 360°, а эта сумма равна 720° без суммы двугранных углов. Значение 360° сумма двугранных углов принимает в вырожденном случае (дважды покрытый плоский угол).

В то же время сумма двугранных углов может быть сколь угодно близка к 720°. Значение 720° она принимает в вырожденном случае, когда четырёхгранный угол представляет четыре луча на плоскости, такие, что в выпуклом угле между любыми двумя соседними лучами других лучей нет.

26.22. а) Для существования описанной конической поверхности (подразумевается поверхность прямого кругового конуса) необходимо и достаточно, чтобы плоскости, проведённые через биссектрисы плоских углов перпендикулярно плоскостям граней четырёхгранного угла, пересекались по прямой. Эта прямая будет служить осью конуса.

б), в) Критерием вписываемости и сферы, и конической поверхности в четырёхгранный угол служит наличие прямой пересечения биссекторных плоскостей двугранных углов данного четырёхгранного угла. Эта прямая является множеством центров сфер, вписанных в четырёхгранный угол, и осью конической поверхности, которая касается граней угла по прямым, являющимся множеством точек касания данной грани со всевозможными сферами, вписанными в четырёхгранный угол.

Эти же критерии сохраняют свою силу для многогранных выпуклых углов. Что касается трёхгранного угла, то для него всегда есть и вписанная, и описанная конические поверхности, а также вписанные сферы, так как сформулированные критерии для трёхгранного угла всегда имеют место.

26.23. Например, так: любое ребро внутреннего угла лежит внутри любого двугранного угла внешнего.

Это определение задаёт то, что один из трёхгранных углов как часть пространства является подмножеством другого.

Однако в данном случае ничего определённого про сравнение двугранных и плоских углов по отдельности сказать нельзя.

Если же принять за определение то, что полуплоскости, соединяющие рёбра внешнего и внутреннего углов и не пересекающие граней углов, пересекаются по одной прямой, то можно отметить, что плоские углы внутреннего угла меньше, а двугранные — больше, чем соответствующие углы внешнего.

26.24. Если тень — треугольник, то многогранник — тетраэдр. Если тень — четырёхугольник, то многогранник — тетраэдр, октаэдр или куб. Если тень шестиугольная, то многогранник — куб или икосаэдр. Если тень — десятиугольник, то многогранник — додекаэдр. Если мы имеем возможность поворачивать многогранник, то всегда сможем по теням определить его вид.

26.25. Бумажную цилиндрическую трубу нужно пережать в двух взаимно перпендикулярных направлениях. При правильно подобранном расстоянии между линиями пережима получится правильный тетраэдр.

Этот метод использовался в первых упаковочных линиях компании «Тетрапак». Поэтому пакеты из-под молочных продуктов когда-то были в форме правильного тетраэдра.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ V

В данном разделе собраны в основном задачи, требующие незаурядных пространственных способностей. Наряду с этим для их решения требуются хорошие вычислительные навыки.

Особое внимание следует обратить на задачу **V.35**, основным инструментом для решения которой являются формулы для вычисления площади поверхности сферы и её частей, не изученные к моменту прохождения главы V. Целесообразно эту задачу либо предложить как трудную для очень сильных учеников, снабдив её подсказкой, либо дать при прохождении § 32.

Решения задач **V.31—V.33** не приводятся, так как аналогичные им были решены в соответствующих пунктах. Целесообразно дать эти задачи для многовариантной самостоятельной работы или в качестве долговременного задания.

V.1. Эти плоскости ограничивают сопровождающий параллелепипед данного тетраэдра.

V.2. В этом многограннике будет 12 граней (столько, сколько рёбер у куба), 24 ребра и соответственно 14 вершин. Многогранник можно представить себе как куб с построенными на его гранях такими правильными пирамидами, что две грани с общим ребром из разных пирамид лежат в одной плоскости и тем самым образуют единую грань многогранника.

V.3. Например, возможен следующий способ. На грани тетраэдра найти центр и измерить расстояние a от центра до данной точки. Измерив сторону тетраэдра, по теореме Пифагора найдём искомое расстояние как корень из суммы квадратов высоты и найденного нами расстояния a. Возможны и иные способы решения этой задачи

V.4. Пусть $SA_1A_2\ldots A_n$ — данная пирамида, O — центр её основания. Рассмотрим трёхгранный угол с вершиной A_1 и рёбрами A_1S, A_1A_2, A_1O. В нём известны: плоский угол SA_1O, равный φ_2, плоский угол SA_1A_2, равный $90^\circ - \dfrac{\varphi_1}{2}$, и плоский угол OA_1A_2, равный $90^\circ \cdot \dfrac{n-2}{n}$, или $90^\circ - \dfrac{180^\circ}{n}$ (половина угла при вершине правильного n-угольника). Применив теорему косинусов в этом трёхгранном угле, получим:

$$\cos\varphi_3 = \frac{\cos\varphi_2 - \sin\dfrac{180^\circ}{n}\sin\dfrac{\varphi_1}{2}}{\cos\dfrac{180^\circ}{n}\cos\dfrac{\varphi_1}{2}}.$$

Аналогично получим:

$$\cos\frac{\varphi_4}{2} = \frac{\sin\dfrac{180^\circ}{n} - \sin\dfrac{\varphi_1}{2}\cos\varphi_2}{\cos\dfrac{\varphi_1}{2}\sin\varphi_2}.$$

Разумеется, приведёнными соотношениями не исчерпывается список равенств, связывающих указанные углы. Другие соотношения между их тригонометрическими функциями можно получить из теоремы синусов для трёхгранного угла, второй теоремы косинусов для трёхгранного угла, применяя указанные теоремы для других трёхгранных углов.

Ясно, что задание одного из этих углов определяет пирамиду с точностью до подобия.

V.5. Многогранник, изображённый на рисунке 49, представляет собой призматический клин, объединённый с двумя пирамидами P_1ABMN и P_2CDNM. При этом $MN \parallel (ABC)$ и находится на расстоянии $\dfrac{1}{2}$ от плоскости ABC. Поэтому при $x \leqslant \dfrac{1}{2}$ сечение будет представлять собой прямоугольник (так как его стороны параллельны сторонам квадрата, поскольку

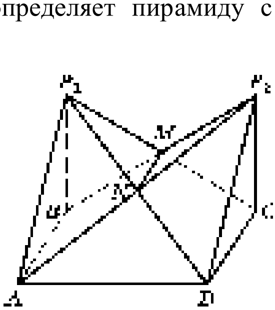

Рис. 49

каждая получена пересечением двух параллельных плоскостей — плоскости сечения и плоскости ABC — третьей плоскостью), одна сторона которого равна 1, а другая — $1 - x$. Таким образом, при $x \leqslant \frac{1}{2}$ площадь сечения равна $1 - x$.

При $x > \frac{1}{2}$ сечение распадается на два одинаковых квадрата со стороной $1 - x$. Таким образом, при $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$ площадь сечения равна $2(1 - x)^2$. При $x > 1$ сечение отсутствует.

Разумеется, в решении рассматривались лишь плоскости, лежащие в том же полупространстве относительно ABC, что и исходный многогранник.

V.6. Многогранник изображён на рисунке 50. Точка M находится на высоте 1 над плоскостью ABC. Пирамида $MABC$ является пересечением пирамид P_1ABC и P_2ABC. Поэтому при $x \leqslant 1$ площадь сечения равна сумме площадей сечений пирамид P_1ABC и P_2ABC без площади сечения пирамиды $MABC$. Сечение каждой из этих пирамид плоскостью, параллельной основанию, есть равносторонний треугольник. Для пирамид P_1ABC и P_2ABC его сторона равна $1 - \frac{x}{2}$, а для $MABC$ — $1 - x$. Итак, для $x \leqslant 1$ искомая площадь равна $\frac{\sqrt{3}}{8}(2 - x^2)$.

При $1 < x \leqslant 2$ сечение представляет собой два равносторонних треугольника со стороной $1 - \frac{x}{2}$, поэтому площадь его равна $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2$. При $x > 2$ сечение отсутствует.

Разумеется, в решении рассматривались лишь плоскости, лежащие в том же полупространстве относительно ABC, что и исходный многогранник.

V.7. а) Вообще говоря, возможны различные способы вписать куб в правильный тетраэдр (рис. 51) (под вписанным в тетраэдр кубом понимается куб, все вершины которого лежат на гранях тетраэдра).

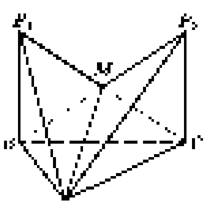

Рис. 50

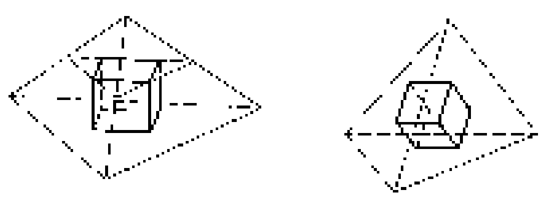

Рис. 51

Подсчитаем здесь случай 1 (одна из граней куба лежит на грани тетраэдра. В этом случае картинка определяется однозначно, так как две соседние вершины куба лежат на одной грани тетраэдра, поэтому ребро, соединяющее эти вершины, параллельно ребру основания). Пусть ребро тетраэдра равно *a*. Рассмотрим сечение тетраэдра плоскостью верхней грани куба. Получится равносторонний треугольник, в который вписана верхняя грань куба. Обозначим через *x* ребро куба. Тогда сторона сечения равна $a \cdot \dfrac{a\sqrt{\frac{2}{3}} - x}{a\sqrt{\frac{2}{3}}}$. Из рассмотрения плоского рисунка сечения ясно, что эта же сторона равна $x\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)$. Решив полученное уравнение, имеем

$$x = a \cdot \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2} + \sqrt{6} + 3}.$$

б) Для случая с кубом, вписанным в прямоугольный тетраэдр, также возможны различные конфигурации. Мы посчитаем ребро куба в конфигурации, изображённой на рисунке 52.

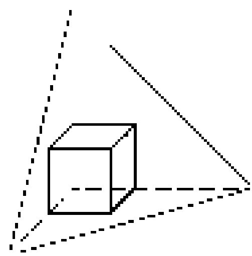

Рис. 52

Пусть боковое ребро тетраэдра равно *a*, а ребро куба обозначено *x*. Решение абсолютно аналогично решению из предыдущего пункта. Разница лишь в том, что в сечении плоскостью верхней грани куба получается прямоугольный треугольник с катетом $a - x$, в который вписан квадрат со стороной *x*. Отсюда получаем о т в е т: $x = \dfrac{a}{3}$.

в) И в этом случае, даже если основание куба лежит на основании пирамиды, возможно бесконечно много способов вписать куб в пирамиду (ибо верхнее основание куба может быть вписано в квадрат сечения пирамиды бесконечным числом способов). Мы выберем для подсчёта вариант, когда вершины куба лежат на рёбрах пирамиды.

Итак, пусть ребро пирамиды равно *a*. Тогда её высота равна $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ (так как правильная четырёхугольная пирамида с равными рёбрами есть половина правильного октаэдра). Пусть сторона сечения пирамиды верхней гранью куба есть квадрат со стороной *x*. Но сторона сечения находится, как и в предыдущих пунктах, из подобия, как $a \cdot \dfrac{\frac{a}{\sqrt{2}} - x}{\frac{a}{\sqrt{2}}}$.

Отсюда $x = \dfrac{a}{1+\sqrt{2}}$.

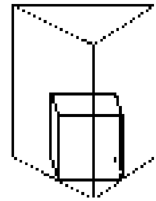

Рис. 53

г) В последнем случае куб можно вписать лишь так, как указано на рисунке 53. Пусть ребро призмы имеет длину *a*. Длину ребра куба обозначим *x*. Проведём сечение через грань куба, параллельную основаниям призмы. Получим квадрат со стороной *x*, вписанный в равносторонний треугольник со стороной *a*. Тогда

$$x = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}.$$

V.8. Случаев расположения вписанной пирамиды может быть много (например, квадрат основания можно бесконечным числом способов вписать в квадратное сечение внешней пирамиды). Посчитаем отношение рёбер пирамид в случае, когда вершины основания вписанной пирамиды лежат на рёбрах внешней, а вершина вписанной — в центре основания внешней пирамиды.

Так как рёбра правильной четырёхугольной пирамиды с равными рёбрами наклонены к основанию под углом 45° и наоборот, то верхняя четырёхугольная пирамида будет тоже иметь все рёбра равными. Тем самым она равна вписанной пирамиде. Таким образом, искомое отношение рёбер есть отношение высот и равно 2.

V.9. Для решения задачи необходимо лишь выразить высоту через сторону основания и плоский угол при вершине. Это выражение приведено в решении задачи **23.37**:

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}}.$$

V.10. а) Так как радиус сферы, описанной около куба, равен половине диагонали куба, то ребро куба равно $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

б) Так как такая пирамида является половиной октаэдра, то радиус описанной сферы равен высоте пирамиды, т. е. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

в) Если призму можно вписать в сферу, то эта призма прямая (так как её боковые грани должны быть параллелограммами, которые можно вписать в окружность, т. е. прямоугольниками). При этом центр описанной сферы лежит на середине отрезка, соединяющего центры описанных окружностей оснований. Из теоремы Пифагора получаем $a = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}R$.

Радиус сферы, вписанной в куб, равен половине его ребра. А сферы, вписанной в призму п. «в», не существует, так как радиус вписанной окружности основания не равен боковому ребру (см. задачу **22.4**).

Для пирамиды п. «б» воспользуемся формулой из задачи **23.37** и получим $r = \dfrac{a}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

V.11. Расстояние от центра описанной сферы до вершин вписанного в неё многогранника равно R.

а) Пусть ребро основания правильной пирамиды $SA_1A_2...A_n$ равно a, а боковое ребро — b. Обозначим центр сферы через O, центр основания через H. Из равнобедренного треугольника SOA_1 как его высоту находим расстояние $\rho_1 = \sqrt{R^2 - \dfrac{b^2}{4}}$ от O до ребра SA_1. Аналогично из равнобедренного треугольника A_1OA_2 находим расстояние $\rho_2 = \sqrt{R^2 - \dfrac{a^2}{4}}$ от O до ребра основания.

Пусть M — середина ребра A_1A_2. Тогда высота из O в треугольнике SOM является перпендикуляром к плоскости боковой грани, поэтому её длина и есть расстояние от O до боковой грани. Эта длина может быть найдена, так как в треугольнике SOM известны все стороны. Получаем

$$h_1 = \sqrt{\frac{4R^2b^2 - R^2a^2 - b^4}{4b^2 - a^2}}.$$

Что касается расстояния от O до основания пирамиды, то оно находится из теоремы Пифагора в треугольнике OHA_1:

$$h_2 = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4\sin^2\dfrac{180^\circ}{n}}}.$$

б) Пусть ребро основания призмы равно a, а боковое ребро — b. Тогда расстояния до рёбер вычисляются по тем же формулам, что и в п. «а» (так как получаются из таких же равнобедренных треугольников). Таким же останется и расстояние от центра сферы до плоскости основания. Расстояние же до боковой грани считается как высота равнобедренного треугольника M_1OM_2, где M_1M_2 — середины соседних боковых рёбер, а O — центр описанной сферы. Получаем $h_1 = \sqrt{R_1 - \dfrac{h^2 + a^2}{4}}$.

V.12. Рассмотрим шар радиуса r, вписанный в прямой трёхгранный угол. Расстояние от вершины угла до центра шара равно $r\sqrt{3}$. Кроме того, центр шара расположен на «биссектрисе» (пересечении биссекторных плоскостей двугранных углов) трёхгранного угла. Заметим также, что точки касания двух шаров лежат на их линии центров.

Тогда для главной диагонали куба получаем уравнение:

$$a\sqrt{3} = 2r\sqrt{3} + 4r,$$

откуда и находим $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+4}$ (здесь a — ребро куба).

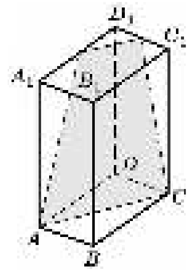

Рис. 54

V.13. Сечение представляет собой трапецию (рис. 54), одно из оснований которой равно диагонали основания призмы (в частности, прямоугольник, если сечение диагонально), либо треугольник. Ясно, что из всех треугольных сечений наибольшую площадь имеет то, которое проходит через вершину верхнего основания (например, потому, что у всех треугольников сторона — диагональ основания призмы — одинакова, а высота наибольшая именно у треугольника, проходящего через вершину основания). Таким образом, разумно рассматривать лишь сечения, имеющие след на верхнем основании призмы.

Пусть сторона основания призмы равна a, а высота — b. Заметим, что след сечения на верхнем основании есть отрезок, параллельный диагонали. Пусть x — расстояние от вершины B_1 до следа. Тогда площадь трапеции-сечения равна $S(x) = \dfrac{1}{2}\left(2x + a\sqrt{2}\right)\sqrt{b^2 + \left(\dfrac{a}{\sqrt{2}} - x\right)^2}$. При этом x пробегает значения от 0 до $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ (если $x > \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, сечение будет симметрично уже исследованному). Взяв производную по x, убеждаемся, что знак её (а следовательно, и монотонность функции $S(x)$) определяется знаком выражения $2x^2 - a\sqrt{2x} + b^2$.

Таким образом, в п. «а» $S(x)$ имеет два экстремума. Сравнив значения в экстремумах со значениями на концах, получим $S_{max} = S(3) = 12$. В п. «б» $S_{max} = S(1) = 40\sqrt{5}$.

V.14. Ясно, что площадь сечения есть сумма площади сечения куба и площади сечения пирамиды. Обозначим ребро куба через a.

а) Сечение куба есть всегда квадрат одной и той же площади, а площадь сечения пирамиды наибольшая, если оно проходит через вершину пирамиды. Тогда наибольшая площадь сечения равна $a^2\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

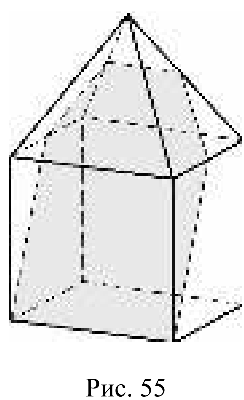

Рис. 55

б) В этом случае найти наибольшую площадь сечения весьма затруднительно. Ясно, что наибольшая площадь будет у сечения, пересекающего противоположную грань пирамиды (рис. 55), так как до этой грани площадь сечения возрастает, а после, когда плоскость сечения не пересекает пирамиду, площадь сечения убывает.

Приведём здесь выражение для площади сечения через угол α секущей плоскости с основанием куба и ребро куба a:

$$S = a^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{\sqrt{2}\left(1-\operatorname{ctg}\alpha\right)}{\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\varphi\right)} - \frac{\sqrt{2}\left(1-\operatorname{ctg}\alpha\right)^2\sin\alpha}{3\sin^2\left(\alpha+\varphi\right)}\right),$$

где φ — двугранный угол при основании пирамиды.

Ясно, что более простого выражения не получится, даже если выразить площадь сечения через другую величину.

Примерно такое же выражение получается и в п. «в».

г) Очевидно, наибольшим будет сечение, проходящее через вертикальное ребро куба. Действительно, среди сечений, проходящих через вершину куба, наибольшим по площади будет диагональное. Среди сечений пирамиды, проходящих через ребро, наибольшим по площади будет проходящее через диагональ основания. Ответ: $S_{\max} = \left(a^2\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)$.

V.15. В задаче предполагается, что шары не пересекаются между собой (иначе ответом будет служить просто вписанный в тетраэдр шар). Тогда ясно, что наибольший радиус будут иметь шары, которые касаются друг друга (объяснить это можно так: мы одновременно раздуваем одинаковые маленькие шарики, вписанные в трёхгранные углы тетраэдра. Ясно, что это можно делать до тех пор, пока шары не коснутся. В силу симметрии это произойдёт одновременно со всеми шарами).

Рассмотрим два таких шара. Центр каждого из них лежит на высоте тетраэдра, которая наклонена к каждой из заключающих её граней под углом $\arccos\frac{\sqrt{8}}{3}$. Рассмотрим проекцию на грань. Получается равнобочная трапеция, одно из оснований которой — ребро тетраэдра, другое — отрезок между центрами касающихся шаров, т. е. диаметр шара. Боковая сторона трапеции равна $r\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{\sqrt{8}}{3}\right) = 2\sqrt{2}\,r$, где r — радиус шара. Тогда, так как боковая сторона трапеции наклонена к основанию под углом 30° (поскольку является проекцией высоты тетраэдра на боковую грань), получаем для r уравнение $2\sqrt{6}r + 2r = 1$, откуда $r = \frac{1}{2+2\sqrt{6}}$.

V.16. Ясно, что указанный цилиндр будет иметь наибольшую образующую, если обе окружности его оснований будут касаться граней куба. Пусть ребро куба равно a, а радиус окружности основания — r. Так как окружность основания цилиндра лежит в плоскости, перпендикулярной оси, то она касается сторон сечения куба, являющегося либо равносторонним треугольником, либо шестиугольником.

Рассмотрим первый случай. Тогда сторона этого треугольника равна $2\sqrt{3}r$. Из подобия треугольных пирамид с вершиной в вершине куба и основаниями — сечениями куба плоскостью окружности основания цилиндра и плоскостью, проходящей через концы рёбер с общей вершиной (рис. 56), и с учётом того, что две плоскости, проходящие через концы рёбер с общей вершиной, делят диагональ параллелепипеда на три равные части, получаем $\frac{a}{\sqrt{3}}:\frac{a\sqrt{3}-l}{2}=2\sqrt{3}r:a\sqrt{2}$, откуда $l=\frac{3\sqrt{3}ar-a^2\sqrt{2}}{3r}$ (здесь l — искомая образующая цилиндра).

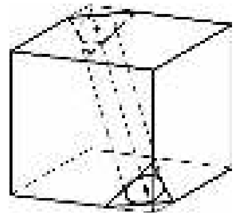

Рис. 56

В другом случае рассуждение аналогично (считаем окружность вписанной не в шестиугольник, а в равносторонний треугольник, образованный продолжениями сторон шестиугольника через одну). Нетрудно видеть, что этот треугольник будет иметь всегда сторону $a\sqrt{2}$.

Поэтому при радиусах основания, больших, чем радиус окружности, вписанной в указанный треугольник, такого цилиндра просто нет. При меньших радиусах подходят рассуждение и ответ из предыдущего случая.

V. 17. а) Заметим, что наибольшая образующая будет у того цилиндра, чьё верхнее основание коснётся трёх других граней тетраэдра. Дальнейшие рассуждения полностью повторяют решение задачи **V.7** с заменой вписанного в треугольник квадрата на вписанную окружность верхнего основания цилиндра.

б) В решении этой задачи имеют место вычислительные трудности. Ясно, что наибольшей будет образующая у цилиндра, окружность основания которого касается граней тетраэдра.

в) В данном случае получаем окружность основания, касающуюся двух смежных граней тетраэдра (другая окружность будет касаться двух других граней, поэтому цилиндр никуда сдвинуться внутри тетраэдра не сможет). Фактически требуется найти расстояние между плоскостями, параллельными скрещивающимся рёбрам тетраэдра, и такими, что расстояние между следами одной плоскости на смежных гранях равнялось бы диаметру окружности основания (рис. 57). Так как сечение каждой плоскостью является прямоугольником, то указанное расстояние есть просто сторона этого прямоугольника. Из теоремы Фалеса искомая образующая равна $\frac{a}{\sqrt{2}}-2r\sqrt{2}$.

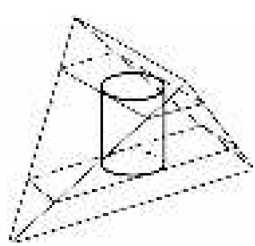

Рис. 57

V.18. Рассмотрим результат такой операции, проведённой над плоскостью и точкой вне плоскости. Множеством середин отрезков будет плоскость, параллельная данной. Если вместо точки взять плоский многоугольник, не лежащий в данной плоскости, то множество середин либо останется плоскостью, параллельной данной (если многоугольник лежал в параллельной плоскости), либо будет слоем между двумя плоскостями, параллельными данной. Если теперь вместо плоскости взять полупространство, то результатом будет также полупространство (набор слоёв, ограниченных плоскостями, параллельными граничной).

Рассмотрим теперь один из данных многогранников, а другой будем рассматривать как пересечение полупространств, ограниченных плоскостями его граней. Тогда, проделав такую операцию с гранями первого многогранника, получим набор полупространств. Пересечение этих полупространств даст нам результат операции для двух многогранников. Но пересечение полупространств является выпуклым многогранником.

V.19. а) Нет. У этой пирамиды вершина проектируется в центр описанной окружности. Соответствующий пример легко построить, взяв неравносторонний треугольник и проведя через центр его описанной окружности перпендикуляр к плоскости треугольника. Любая точка этого перпендикуляра является вершиной пирамиды, у которой боковые рёбра одинаково наклонены к основанию.

б) Нет. Рассмотрим прямой трёхгранный угол и пересечём его плоскостью так, чтобы в сечении получился неравносторонний треугольник. Этот треугольник примем за основание. Очевидно, условие выполнено, но пирамида не является правильной.

в) Нет. Этого достаточно лишь для того, чтобы вершина проектировалась в центр вписанной окружности основания. Пример строится аналогично тому, как показано в п. «а».

г) Нет. Контрпримером является пример п. «б».

д) Нет. Контрпримером является пример п. «б» (боковые рёбра перпендикулярны противоположным рёбрам основания).

Таким образом, сочетание любых двух условий *б*, *г*, *д* даёт отрицательный ответ на вопрос.

Сочетание условий *а* и *в* даёт утвердительный ответ на вопрос (так как центры вписанной и описанной окружностей совпадают лишь у правильного треугольника, после чего равенство боковых рёбер становится очевидно).

Сочетание условий *а* и *б* также даёт утвердительный ответ на вопрос задачи. Для доказательства указанного факта заметим, что если в трёхгранном угле равны углы между ребром и противоположной гранью, то равны и все плоские углы. Пусть угол между ребром и противолежащей гранью трёхгранного угла равен φ. Тогда из рассмотрения соответствующих прямоугольных треугольников имеем $\sin A = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\gamma}$. Проведя анналогичные рассуждения с ребром из вершины C, получим

$\sin A = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\beta}$, откуда и следует требуемое (можно аналогично разобрать случай, когда углы не равны, а дополняют друг друга до 180°).

В пирамиде все плоские углы при вершине одинаковы и, кроме того, из-за равенства углов наклона боковых рёбер к основанию боковые рёбра равны. Тогда боковые грани — равные равнобедренные треугольники, а в основании — равносторонний треугольник.

Сочетание условий *а* и *г* также даёт утвердительный ответ на вопрос, так как условие *г* даёт равенство плоских углов трёхгранного угла, в котором равны двугранные углы, т. е. плоских углов при вершине. Далее решение дословно повторяет решение из предыдущего случая.

Сочетание условий *а* и *д* даёт положительный ответ на вопрос. Для приведения примера нарисуем сопровождающий параллелепипед. У него равны три диагонали, выходящие из одной точки, и в гранях углы между диагоналями будут равны. При этом на наибольшее боковое ребро параллелепипеда будут смотреть два равных тупых угла. Это означает, что треугольники, образованные половинами диагоналей, будут равны. Тогда рёбра основания у тетраэдра окажутся равными.

Условие *б*, как выяснено ранее, эквивалентно равенству плоских углов при вершине. Условие *в* эквивалентно тому, что равны плоские углы при одной вершине в боковых гранях (это следует из того, что в трёхгранном угле против равных двугранных углов лежат равные плоские). Но тогда боковые грани равны как треугольники (по общему ребру и двум прилежащим углам). Тогда боковые рёбра равны, а значит, пирамида правильная.

Совместного выполнения условий *в* и *г* достаточно для того, чтобы пирамида была правильной, так как условие *г* эквивалентно тому, что равны плоские углы при вершине. Далее доказательство дословно повторяет доказательство из предыдущего случая.

Совместного выполнения условий *в* и *д* недостаточно для того, чтобы пирамида была правильной. Легко построить соответствующий сопровождающий параллелепипед.

V.20. Нет. Во всех случаях в любую треугольную пирамиду можно вписать сферу и вокруг любой треугольной пирамиды можно описать сферу.

V.21. Таким утверждением может быть, к примеру, теорема косинусов в поперечном сечении призмы.

V.22. а) В сечении может быть от 3 до $n + 1$ сторон. Треугольным сечением является осевое сечение. Четырёхугольное сечение получится при пересечении плоскостью, параллельной ребру основания, проведённой близко от этого ребра. Двигая эту плоскость дальше от ребра и при необходимости поворачивая, получаем последовательно числа сторон до n. Наконец, проведя плоскость близко от вершины основания параллельно боковому ребру, получим в сечении $n + 1$-угольник.

б) В сечении может быть от 3 до $n + 2$ сторон. Построения сечений с количеством сторон от 3 до n аналогичны построениям в п. «а». Проведя плоскость близко от вершины нижнего основания через противоположную вершину верхнего, получим сечение с $n + 1$ стороной. Проведя плоскость близко от вершины верхнего основания и противоположной вершины нижнего, получим сечение с $n + 2$ сторонами (здесь проведено построение для случая чётного n. Оно легко модернизируется для случая нечётного n).

Приведём ещё такие соображения. Легко построить сечения с тремя рёбрами и максимально возможным количеством рёбер. Начнём поворачивать и двигать плоскость. Делать это нужно так, чтобы избегать «катастроф», т. е. увеличения количества рёбер больше чем на 1 (такое случается, например, если сдвинуть плоскость, проходящую через ребро, в глубь пирамиды. Сечение сразу из отрезка сделается четырёхугольником). Таким образом, число рёбер обязано пройти все значения между крайними.

Указанное рассуждение не является решением задачи, так как необходимо доказательство возможности движения без «катастроф». Однако оно наглядно помогает прийти к ответу.

V.23. Да. Возьмём хорду ромба длины d (очевидно, такая хорда есть, например параллельная большей диагонали ромба) и построим сечение через эту хорду перпендикулярно плоскости основания. Оно будет квадратом со стороной d.

V.24. Получится октаэдр. Отметим, что этот октаэдр будет гомотетичен октаэдру, получающемуся при соединении центров граней. Поэтому в случае прямоугольного параллелепипеда в полученный октаэдр можно будет вписать сферу (так как в силу симметричности исходного параллелепипеда его центр будет равноудалён от граней октаэдра).

В случае с параллелепипедом с равными ромбами в гранях вокруг октаэдра можно описать сферу, так как центр параллелепипеда будет равноудалён от центров граней (впрочем, для этого равенства ромбов не нужно, требуется лишь, чтобы грани были ромбами. Тогда расстояние от центра параллелепипеда до центра грани равно половине ребра).

В случае с кубом полученный октаэдр правильный.

V.25. Да. Достаточно рассмотреть правильную пирамиду $SABC$, длина бокового ребра которой очень велика по сравнению с длиной ребра основания. Поместим внутрь пирамиды тетраэдр $KLMN$ так, чтобы две его вершины были около S, а две другие — на основании пирамиды. Внутренний тетраэдр имеет сумму рёбер, примерно равную сумме четырёх боковых рёбер внешнего тетраэдра. Поскольку боковое ребро внешнего тетраэдра существенно больше ребра основания, это расположение является искомым примером.

Имеет место теорема: сумма рёбер внутреннего тетраэдра не превосходит $\frac{4}{3}$ суммы рёбер внешнего. Приведённый пример показывает, что оценка $\frac{4}{3}$ точная.

V.26. До девяти частей, если поверхности кубов пересекаются, и на три части, если поверхности не пересекаются. Девять частей получится, если один куб срезает вершины другого куба. Этими частями будут отрезанные пирамидки (не более шести частей), пересечение кубов, часть внешнего куба без пересечения и внешняя часть пространства.

На большее число частей пространство не поделится, так как пересечение выпуклых многогранников — выпуклый многогранник. Части могут быть такими: внешняя часть пространства, пересечение кубов, части кубов без пересечения. Первые две части — связные множества. Ясно, что внешняя часть каждого куба не может разделиться более чем на шесть частей. Действительно, каждая часть образована отсечением части куба с вершиной гранью другого куба. Поэтому частей не более шести. Оба куба не смогут отрезать друг от друга более чем шесть частей.

V.27. Ясно, что для этого прямоугольный параллелепипед, описанный вокруг меньшего шара, должен лежать внутри большего шара. Действительно, у параллелепипеда, содержащего шар, любое измерение больше диаметра шара. Но описанный параллелепипед есть куб. Тогда радиус внешнего шара должен быть не меньше радиуса шара, описанного около куба. Получаем неравенство $R_2 \geqslant R_1\sqrt{3}$.

V.28. Сумма кривизн всех вершин выпуклого многогранника равна 4π. Обозначим в соответствии с § 25 количество вершин через e, рёбер — через k, граней через f. Тогда суммарная кривизна $S = 2\pi e - \Sigma$, где Σ обозначена сумма плоских углов многогранника. Для неё имеем $\Sigma = -2\pi f + R\pi$, где R — суммарное количество сторон в многоугольниках граней. Но каждое ребро многогранника является стороной ровно двух граней. Поэтому $R = 2k$. Подставив это значение в исходное выражение и воспользовавшись формулой Эйлера, получим искомый результат.

V.29. Основой для аналогии может служить принятие плоских углов за «стороны», а двугранных углов за «углы» при переформулировках теорем для треугольников. Тогда имеют место признаки равенства (правда, к ним добавлен ещё один — «по трём углам»), теоремы о том, что «биссектрисы» и «медианы» («медиана» — плоскость, проведённая через ребро и биссектрису противолежащего угла) пересекаются в одной точке, а также теорема синусов. Теорема косинусов места не имеет (точнее, её формулировка совершенно иная). Вообще не будут иметь места любые метрические теоремы (поскольку длина отрезка и величина плоского угла — разные понятия).

Переход к двойственному трёхгранному углу показывает, что за «стороны» можно принять двугранные углы, а за «углы» — плоские углы трёхгранного угла. Все сформулированные выше аналогии сохранятся.

V.33. б) Измерим диаметр шара и склеим половинку правильного октаэдра, у которого вписанный шар имеет тот же диаметр. Смажем внутренность пирамидки краской и аккуратно наденем её на шар. На шаре появятся четыре точки. Это будут вершины куба, двойственного данному октаэдру (так как шар, вписанный в октаэдр, касается граней в их центрах). Проделав эту операцию с противоположной стороны, получим остальные 4 вершины куба.

а) Заметим, что из п. «б» вытекает решение п. «а», так как куб есть сопровождающий параллелепипед для правильного тетраэдра. Значит, среди вершин куба есть и вершины правильного тетраэдра.

в), г) С пирамидой и призмой поступим одинаково. Сосчитаем радиус окружности, в которую вписано основание, и возьмём квадрат со стороной, равной диаметру этой окружности (в случае призмы возьмём треугольник, для которого данная окружность является вписанной). Надев его на шар, получим 4 точки касания. Это будут вершины основания пирамиды. Аналогично поступим и с боковой гранью (только там в случае с пирамидой надевать на шар будем треугольник).

V.34. Возьмём любую точку в тетраэдре и соединим её с вершинами. Заметим, что среди образовавшихся шести попарных углов между отрезками есть хотя бы один тупой. Действительно, в противном случае, проведя плоскость, перпендикулярную одному из отрезков через взятую точку, получили бы, что все отрезки лежат в одном полупространстве относительно этой плоскости, а значит, и тетраэдр лежал бы там же.

Осталось отметить, что если из точки отрезок виден под тупым углом, то точка лежит в шаре, построенном на этом отрезке как на диаметре.

V.35. Рассмотрим сферические сегменты, отсекаемые на описанной сфере плоскостями граней данного многогранника. Заметим, что эти сегменты одинаковы, так как одинаковы радиусы окружностей, описанных около граней многогранника. Ясно, что эти сегменты покрывают сферу, накладываясь друг на друга. Поэтому их суммарная площадь, равная $2\pi R_2(R_2 - R_1)n$ (n — число граней), больше площади описанной сферы, равной $4\pi R_2^2$, откуда и следует требуемое неравенство.

План прохождения главы V

№ урока	Тема и её содержание	Повторение	Примечание
1, 2	Обобщение понятия многоугольника. Многогранник	Геометрическое тело, граничен-ность, диаметр и т. д.	
3—5	Призма, параллелепипед. Упражнения. Проверочная работа	Цилиндр и его свойства. Задачи на цилиндр. Углы в пространстве	Здесь может быть проведён урок, посвящённый придумыванию задач о призмах
6—10	Пирамида. Виды пирамид. Упражнения. Работа самопроверки	Перпендикулярно сть. Множество точек в пространстве. Основные ГМТ	Здесь может быть проведён урок-семинар «Некоторые виды пирамид»

			(см. комментарий к § 23)
11—13	Выпуклые многогранники	Вписанные и описанные многоугольники. Выпуклые фигуры	Здесь может быть проведён семинар «Вписанные и описанные многогранники»
14—16	Теорема Эйлера. Развёртка выпуклого многогранника	Многогранники. Сфера, шар и их свойства	Часть § 24 может быть предложена для самостоятельного изучения при нехватке времени
17—19	Правильные многогранники	Правильные многоугольники. Задачи на правильные призмы и пирамиды	
20, 21	Зачётная контрольная работа		

Из дидактического материала к главе **V**

Проверочная работа (урок № 5)

<table>
<tr><td>I вариант</td><td>II вариант</td></tr>
<tr><td colspan="2">Математический диктант</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Определение</td></tr>
<tr><td>многогранника</td><td>многоугольника</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Что означает утверждение?</td></tr>
<tr><td>Призма не является правильной</td><td>Параллелепипед не является прямоугольным</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. На плоскость α поставлены два прямых цилиндра одинаковой высоты. Является ли цилиндром</td></tr>
<tr><td>их объединение?</td><td>их пересечение?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ответ объяснить.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Истинно ли утверждение?
Если два диагональных сечения</td></tr>
<tr><td>параллелепипеда</td><td>призмы</td></tr>
<tr><td colspan="2">перпендикулярны основанию, то</td></tr>
<tr><td>параллелепипед прямой</td><td>призма прямая</td></tr>
<tr><td colspan="2">Сформулировать утверждение, на котором основан ответ.</td></tr>
</table>

П и с ь м е н н а я   р а б о т а

5. Основание наклонного параллелепипеда — ромб.

Одно из диагональных сечений

прямоугольник	перпендикулярно основанию

Доказать, что другое

перпендикулярно основанию	прямоугольник

Назовём определение призмы через многогранник утверждением I, а через цилиндр утверждением II. Доказать, что

I $\Rightarrow$ II	II $\Rightarrow$ I

Работа самопроверки (урок № 10)

1. Является ли усечённая пирамида пирамидой? Почему?

2. В пирамиде $PABC$ PH — высота. Доказать, что проекция PH на (PAB) лежит на прямой, содержащей высоту грани PAB (чертёж на доске).

3. Параллелограмм $ABCD$ — основание пирамиды, боковые рёбра которой наклонены к основанию под углом 30°. Найти углы параллелограмма.

4. Основание пирамиды, боковые грани которой наклонены под углом 45° к плоскости основания, — равнобедренная трапеция с основаниями 10 и 20. Найти длины боковых сторон трапеции.

5. В каких границах лежит двугранный угол между соседними боковыми гранями в правильной треугольной пирамиде?

В учебнике много различных задач по теме «Многогранники», поэтому мы не приводим здесь тексты самостоятельных работ. Дадим лишь примерный вариант контрольной работы по этой теме (2 ч).

Зачётная контрольная работа (уроки № 20, 21)

I   в а р и а н т

1. Одно из диагональных сечений четырёхугольной наклонной призмы перпендикулярно основанию, а другое — прямоугольник. Верно ли, что основание призмы — ромб? Если верно, то докажите. Если нет, переформулируйте так, чтобы утверждение стало верным, и докажите.

2. В прямоугольный параллелепипед можно вписать шар. Верно ли, что этот параллелепипед — куб?

3. Основание пирамиды — квадрат со стороной a. Две соседние боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к нему под углом φ. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

4. Боковые грани усечённой треугольной пирамиды — равные равнобедренные трапеции. Доказать, что эта пирамида правильная.

5. Доказать, что существует сечение правильного октаэдра, содержащее четыре его ребра.

II вариант

1. Боковая грань AA_1B_1B наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — прямоугольник, а сечение этой призмы плоскостью (BB_1M) (M — точка пересечения медиан треугольника ABC) перпендикулярно основанию. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный.

2. Даны две сферы с общим центром и радиусами $R_2 > R_1$. Какими должны быть размеры прямоугольного параллелепипеда, чтобы он лежал в большем шаре и содержал меньший?

3. Двугранный угол при боковом ребре правильной четырёхугольной пирамиды равен 120°. Найти угол между боковым ребром и основанием.

4. Диагональные сечения усечённой четырёхугольной пирамиды — равнобедренные трапеции. Верно ли, что эта пирамида правильная?

5. Доказать, что любое сечение правильного тетраэдра плоскостью, параллельной противоположным рёбрам, — прямоугольник. Может ли оно быть квадратом? Составить обратное утверждение и проверить его истинность.

ГЛАВА VI. ОБЪЁМЫ

ГЛАВА VII. ПОВЕРХНОСТИ

Эти главы — традиционные для школьного курса геометрии. И построение их традиционное: сначала выработка общего понятия, затем вывод конкретных формул. Однако есть и характерные отличия.

1. Чётко определяется множество фигур, имеющих объём (площадь) в смысле данного определения.

2. Впервые в школьном курсе (и в такой формулировке) даётся теорема о существовании и единственности объёма.

3. Доказательство теоремы об объёме прямого цилиндра (данное опять-таки впервые в школьном курсе и требующее для своего усвоения достаточно высокого уровня «функционального мышления») в начале главы даёт возможность практически сразу же рассмотреть представление объёма интегралом, откуда можно получить формулы объёмов конкретных тел.

4. Сама теорема о представлении объёма интегралом является единственным не строго обоснованным фрагментом курса, так как полное доказательство требует расширения понятия интеграла. Полезно обратить на это внимание учащихся, несмотря на то что рассуждение проведено тактично и не нарушает уверенности ученика в существовании корректного и полного доказательства.

§ 27. Определение площади и объёма

1. Отметим, что понятие простой фигуры является обобщением понятий простого многоугольника и многогранника. Поэтому можно подвести учеников к этому понятию, выявив соответствующие свойства и отбросив требование, чтобы граница состояла только из отрезков или многоугольников. Полезно привести примеры как простых, так и непростых (что особенно важно) тел и фигур.

2. О длине, площади и объёме как функциях можно говорить, лишь введя соответствующие единицы измерения. Единственность объёма обеспечивается тем, что объём единичного куба полагается равным единице. Хочется обратить внимание на то, что авторы впервые для школьного учебника так чётко разделяют понятие объёма (площади, длины) как величины и как функции.

3. Учитывая предстоящую работу над п. 28.2 учебника, представляется интересным обсуждение фразы из п. 27.3: «Если две неотрицательные величины заданы на множестве простых фигур и удовлетворяют свойствам 1 и 2, то они отличаются на постоянный множитель» — перед формулировкой теоремы существования и единственности. Перед учениками ставится вопрос, фактически повторяющий текст учебника: «Пусть имеются две функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$, заданные на множестве плоских

простых фигур и обладающие свойствами 1 и 2. Следует ли из этого, что существует константа k, такая, что $F_1(x) = kF_2(x)$?»

Конечно, можно сослаться на аддитивность функции и воспользоваться соответствующей теорией (фактически повторяющей данную для более широкого класса множеств). Однако эта теория учащимся неизвестна, да и не требуется в данном случае. Ведь обе эти функции выражают площадь и, значит, различаются на постоянный множитель. Величина этого множителя равна квадрату отношения сторон единичных квадратов.

Это рассуждение существенным образом готовит учеников к доказательству теоремы 28.1.

§ 28. Объём прямого цилиндра

В п. 28.1 высказаны наглядные соображения, если так можно выразиться, «доказательства математического утверждения с помощью физики». С учётом уровня класса можно предложить несколько вариантов дальнейших событий:

1) этим и ограничиться;

2) предложить желающим разобрать п. 28.2 самостоятельно и сдать на оценку индивидуально;

3) предложить отдельным учащимся сделать сообщение на уроке. Возможно, для этого нужно разбить доказательство на несколько частей;

4) предложить учащимся разобраться в теореме самостоятельно, а учитель организует по ней семинар в классе;

5) учителю доказать теорему и попросить сильных учеников на следующем уроке повторить доказательство.

Задачи к § 28

28.2. Получившийся многогранник представляет собой куб, объединённый с пристроенными внешним образом на гранях четырёхугольными пирамидами. При этом каждая из таких пирамид равна пирамиде, получающейся, если соединить все вершины одной грани с центром куба. Поэтому объём полученного многогранника вдвое больше объёма исходного куба.

28.3. Нарисуем куб с ребром $1 + x$ и внутри его куб с ребром 1. Объём внешнего куба равен сумме объёма внутреннего (т. е. 1) и трёх объёмов прямых параллелепипедов с единичным квадратом в основании. Остальными объёмами можно пренебречь, так как при малых x они малы.

28.4. а) Многогранник представляет собой прямую треугольную призму с вырезанной другой призмой. Тогда нужно сделать замеры оснований и высот этих призм.

б) То же, что и в п. «а», только призмы теперь четырёхугольные.

в) Многогранник является прямой пятиугольной призмой. Необходимо сделать замер высоты призмы и сторон пятиугольника в основании (так как он состоит из прямоугольника и равнобедренного треугольника, нужно измерить стороны прямоугольника и боковое ребро треугольника).

г) Многогранник является прямой призмой, в основании которой звёздочка. Удобнее всего, видимо, представить себе эту звёздочку внутри квадрата, измерить сторону квадрата и ребро равнобедренных треугольников, которые нужно выкинуть.

28.5. а) Пусть r — радиус основания цилиндра. Тогда его высота равна $h = \sqrt{1 - 4r^2}$. Получаем объём как функцию от r: $V(r) = \pi r^2 \sqrt{1 - 4r^2}$. Наименьший объём равен 0, а наибольший (при $r = \frac{1}{\sqrt{6}}$) равен $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

б) Аналогично пусть r — радиус основания цилиндра. Тогда для его высоты имеем $h = \frac{S}{2r}$. Получаем объём цилиндра как функцию от радиуса основания: $V(r) = \frac{\pi}{2} \cdot Sr$. Таким образом, объём цилиндра с фиксированной площадью осевого сечения принимает любые неотрицательные значения.

28.6. Пусть высота вырезаемого цилиндра равна *h*. Тогда отношение площади верхнего основания цилиндра к площади основания конуса равно $\left(\frac{H - h}{H}\right)^2$. Пусть S — площадь основания конуса. Тогда $V(h) = h\left(1 - \frac{h}{H}\right)^2 S$. Объём будет наибольшим при $h = \frac{1}{3}H$, при этом $V_{\max} = \frac{4}{27}HS = \frac{4}{27}\pi HR^2$.

28.7. Пусть x — сторона квадрата. Для высоты параллелепипеда имеем $h = \sqrt{1 - 2x^2}$, получаем объём как функцию от x: $V(x) = x^2\sqrt{1 - 2x^2}$. После нахождения производной получим, что $V(x)$ меняется в границах от 0 до $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ ($V(x) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ при $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, т. е. если параллелепипед является кубом).

28.8. Пусть высота призмы равна 3. Тогда 1 — периметр основания призмы. Чем больше площадь основания, тем больше объём призмы. Среди равнобедренных (да и вообще всех) треугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет равносторонний. Таким образом, в этом случае наибольший объём призмы равен $\frac{1}{4\sqrt{3}}$.

В другом случае (когда призма имеет высоту 1, а периметр основания равен 3) аналогично получаем наибольший объём равным $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Таким образом, объём призмы находится в границах от 0 до $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

28.9. Решение этой задачи дословно повторяет решение задачи **28.6** до получения формулы наибольшего объёма $V_{\max} = \frac{4}{27}HS$. Подставив числовые данные, получаем $V_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{27}$. Важно обратить внимание на то, что в этом решении мы пользовались тем, что вершины верхнего основания призмы лежат на рёбрах тетраэдра. Для призмы наибольшего объёма это так, поскольку при данной высоте призмы верхнее её основание будет треугольником, вписанным в фиксированный правильный треугольник. Площадь основания призмы (а следовательно, и объём) будет наибольшей, если внутренний правильный треугольник совпадает с внешним.

28.10. Пусть площадь основания (лежащего на одной из граней тетраэдра) параллелепипеда равна *S*. Тогда объём будет наибольшим при наибольшей высоте. Высота же тем больше, чем ближе прямая, проведённая через вершину основания, не лежащую на рёбрах тетраэдра, параллельно ребру основания тетраэдра к вершине прямого угла (рис. 58). Такая прямая будет ближайшей, если в основании квадрат. Повторив эту процедуру для других прямоугольных граней, получаем, что наибольший объём будет у куба (здесь мы воспользовались тем, что наибольший объём существует. Любой другой параллелепипед, кроме куба, можно преобразовать с увеличением объёма).

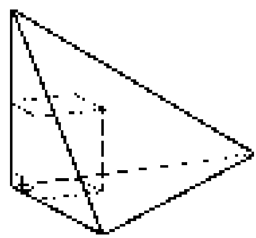

Рис. 58

Если не пользоваться существованием наибольшего объёма, то можно находить наибольший объём среди параллелепипедов с квадратным основанием, вписанных в данную пирамиду, с помощью производной.

28.11. То, что отходов должно быть меньше, означает, что объём изготовленного параллелепипеда должен быть наибольшим.

Если высота параллелепипеда меньше ребра куба, то параллелепипед имеет не наибольший объём (он может быть дополнен до куба). Тогда параллелепипед наибольшего объёма оказывается вписанным в данную фигуру (в том смысле, что одно его основание находится на нижней грани куба, а другое — на рёбрах усечённой пирамиды, причём основания являются квадратными). Рассуждения, приводящие к такой конфигурации, полностью аналогичны рассуждениям предыдущих пунктов (относительно квадрата в основании и того, что вершины верхнего основания лежат именно на рёбрах пирамиды). Пусть ребро основания равно x (очевидно, $x \geqslant 1$, иначе параллелепипед может быть расширен до параллелепипеда с максимальной высотой и единичным основанием). Тогда высота параллелепипеда равна $2 + h$, где h — расстояние от плоскости сечения пирамиды с ребром x до большего основания. Подсчитать h можно из соображений подобия, применённых к неусечённой пирамиде (у неё боковые рёбра равны рёбрам основания): $h = \sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}$. Тогда

$$V(x) = x^2\left(2 + \sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

С помощью производной находим: на области определения ($1 \leqslant x \leqslant 2$) функция $V(x)$ возрастает. Значит, наибольший объём будет у куба.

28.12. Заметим, что при данной высоте параллелепипеда верхнее его основание вписано в окружность фиксированного радиуса. Среди всех прямоугольников, вписанных в фиксированную окружность, наибольшую площадь имеет квадрат (так как площадь прямоугольника равна произведению полуквадрата диагонали на синус угла между диагоналями). Получается, что параллелепипед наибольшего объёма должен быть с квадратным основанием. Пусть x — высота параллелепипеда. Тогда радиус окружности, в которую вписано верхнее основание, равен $R - x$, где R — радиус основания конуса и его высота. $V(x) = \frac{1}{2}x\,(R - x)^2$ и наибольшим объём будет при $x = \frac{R}{3}$, что не равно стороне основания. Поэтому параллелепипед наибольшего объёма не будет кубом.

28.13. Решение этой задачи абсолютно аналогично решению задачи **28.11.** Если R — радиус основания исходного цилиндра, h — его высота, x — радиус основания внутреннего цилиндра, то

$$V(x) = \pi x^2\left(h + \sqrt{R^2 - x^2}\right).$$

В зависимости от соотношения высоты и радиуса основания исходного цилиндра объём будет наибольшим при

$$x = \sqrt{\frac{14R^2 - h^2 + \sqrt{52R^4 + 8R^2h^2 + h^4}}{18}}.$$

28.14. Например, наклонить сосуд, чтобы жидкость достала до кромки. Если покажется дно, то в сосуде меньше половины жидкости, в противном случае — больше половины.

28.15. Это явление наблюдается при истечении воды под слабым напором из изогнутого крана. Объяснение может быть таким: так как высота столба воды становится больше (вода проходит в единицу времени большее расстояние, нежели в кране), а объём остаётся прежним, струя воды, приближённо принятая за цилиндр, утоньшается.

§ 29. Представление объёма интегралом

С методической точки зрения представляется более удобным дать формулировку теоремы после её доказательства. Первый способ рассуждения в теореме более аналитичный, а второй наглядный, и здесь можно задействовать теорему о сжатой переменной.

Задачи к § 29

При решении задач данного параграфа следует обратить особое внимание на выбор нужного направления сечения. Например, можно попробовать в задаче **29.8** пересекать цилиндры параллельно основаниям. В интеграл, который получится, войдёт $\arcsin \frac{x}{H}$. Полезно предложить учащимся нарисовать тела, объёмы которых предлагается найти в задачах **29.4—29.8**.

29.2. Условие Кавальери означает, что при всех x равны площади поперечных сечений двух тел и ширина тел в данном направлении одинакова. Тогда функции $S(x)$ для этих тел равны, пределы интегрирования одни и те же, а значит, равны и объёмы тел.

Пользуясь этим принципом, легко получить, например, что объём призмы равен объёму прямой призмы, высота которой равна высоте исходной, а площадь основания равна площади основания исходной (рис. 59).

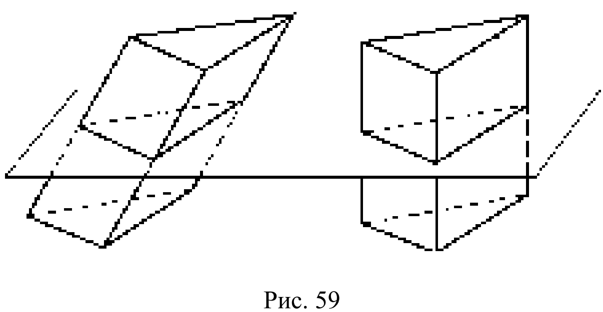

Рис. 59

Планиметрический аналог принципа Кавальери таков: площади двух плоских фигур одинаковы, если они заключены между двумя параллельными прямыми так, что длины отрезков, высекаемых любой прямой, параллельной данным, одинаковы.

29.3. Формула получается прямым интегрированием.

Методика решения задач **29.4**—**29.6** разобрана в решении задачи **29.1**. Можно лишь посоветовать (даже на оценку) нарисовать тела, о которых идёт речь (рис. 60).

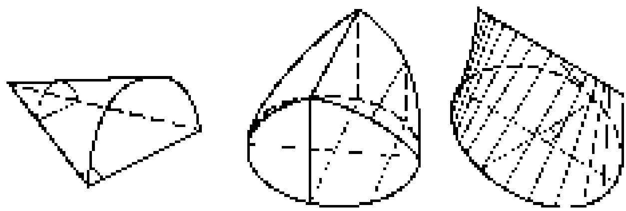

Рис. 60

29.4. Будем пересекать тело плоскостями, перпендикулярными указанному катету, начиная с вершины острого угла. Тогда $V = \int\limits_0^1 S(x)\,dx$. Заметим, что длина сечения треугольника (диаметр полукруга) на расстоянии x от вершины равна x и, значит, $S(x) = \dfrac{\pi x^2}{4}$. Получим $V = \dfrac{\pi}{12}$.

29.5. Заметим, что длина хорды, перпендикулярной диаметру и удалённой от конца диаметра на x, равна $2\sqrt{2x - x^2}$. Тогда $S(x) = 8x - 4x^2$, а объём тела

$$V = \int\limits_0^2 (8x - 4x^2)dx = \frac{16}{3}.$$

29.6. Решение аналогично решению из предыдущей задачи с той лишь разницей, что перпендикулярное сечение является не квадратом, а треугольником с постоянной высотой и основанием, равным хорде круга. Таким образом, $S(x) = \dfrac{1}{2}d\sqrt{2Rx - x^2}$. Тогда $V = \dfrac{1}{2}d\int\limits_0^2 R\sqrt{2Rx - x^2}\,dx$. Последний интеграл есть площадь под полуокружностью, задаваемой уравнением $(x - R)^2 + y^2 = R^2$, $y \geqslant 0$, значит, $V = \dfrac{\pi R^2 d}{4}$.

29.7. Будем пересекать цилиндры плоскостями, параллельными обеим осям. Тогда в сечении будет квадрат со стороной, равной хорде окружности основания цилиндра. Дальнейшее решение дословно повторяет решение задачи **29.5** с заменой единичного радиуса на R — радиус основания цилиндров. О т в е т: $V = \int\limits_0^{2R} (8Rx - 4x^2)\,dx = \dfrac{16}{3}R^3$.

29.8. Эта задача аналогична задаче **29.6**, где кругом служит верхнее (общее) основание цилиндров, а треугольники получаются в сечении плоскостями, параллельными образующим обоих цилиндров. О т в е т: $V = \frac{\pi R^2 H}{4}$.

29.9. Естественно, соотношение объёмов крупы и воды не зависит от размеров кастрюли и количества крупы. Объём крупы вычисляется как интеграл (удобнее интегрировать по прямоугольным сечениям). В результате получается ответ, квадратично зависящий от радиуса дна и линейно — от высоты, на которой взята отметка. От этих же параметров также зависит объём воды. Поэтому отношение объёмов — константа, не зависящая ни от высоты отметки, ни от радиуса основания кастрюли (соответствующий интеграл для объёма крупы равен

$$\int_0^R 2\sqrt{R^2 - x^2}\,\frac{xh}{R}\,dx = \frac{2}{3}R^2 h,$$

где R — радиус основания кастрюли, h — высота метки).

§ 30. Объёмы некоторых тел

Содержание параграфа — независимый вывод формул объёмов четырёх конкретных видов тел. При желании этот набор формул можно дополнить выводом формул объёмов усечённого конуса (пирамиды) и шарового сегмента. Это позволяет провести с учениками групповую работу. Схема проведения таких работ не всем знакома, поэтому расскажем о ней подробнее. Работа состоит из нескольких этапов.

I э т а п. Класс разбивается на группы по шесть человек. Каждому участнику группы даётся задание изучить вывод одной из формул (естественно, задания в группе для всех различные). Четыре ученика учат пункты § 30, а двое получают от учителя тексты, где выводятся формулы объёмов усечённого конуса и шарового сегмента. (Учитель может заменить их другими формулами или вообще не давать других формул, но тогда группа уменьшается до четырёх человек и меняется время дальнейшей работы.) Конечно, учитель учитывает, давая задания, возможности каждого ученика. Изучив соответствующую теорему, ученик записывает её в конспект и находит ученика из своей группы, также закончившего запись. Они рассказывают друг другу каждый свою теорему, записывая коротко вывод в конспекте. После этого каждый из них задаёт вопросы другому и отвечает на его вопросы. Вопросы могут касаться не только техники выкладок, но и обоснования. Они могут содержать какие-то сравнения, обобщения, частные случаи и т. д. Вообще мы советуем записывать вопросы, обещая за хорошие вопросы повышение оценки. После этого пара распадается, и каждый снова ищет свободного участника своей группы и т. д. На проведение такого занятия требуется 2 часа. На дом ученики получают, в частности, задание вывести формулы объёмов шарового сектора (выпуклого) и шарового слоя.

II э т а п. Продолжается работа в тех же группах (это уже следующий урок геометрии). Однако правила меняются. Теперь каждый получает задание — спрашивать вывод какой-то одной из шести формул объёма и отвечать спрашиваемому соответственно одну из четырёх формул (кроме той, что объяснял на прошлом уроке геометрии, и той, что сам спрашивает). За ответ он ставит оценку товарищу (и при желании даёт краткую рецензию — 2 или 3 предложения). На это требуется 1 час.

III э т а п. Наконец, учитель может на следующем (уже четвёртом) уроке вызвать по 1—2 представителя от каждой группы, чтобы по жребию ответить у доски одну из теорем (можно добавить и формулы из домашнего задания). Остальные группы при этом слушают, рецензируют, задают вопросы, добавляют. В итоге каждый ученик оценивается по четырём позициям: 1) запись в конспекте; 2) оценка при ответе товарищу; 3) ответ представителя из группы; 4) качество вопросов и рецензий.

Элемент случайности привносит дополнительную ответственность, игровой момент и компенсируется остальными тремя составляющими оценки.

Несколько заметок для учителя.

1. Желающим ученикам можно предложить вывести формулы, ссылаясь на задачи **29.1**, **29.2**.

2. В п. 30.4 выводится формула объёма не любого тела вращения, а лишь определённого важного случая. Во многих других частных случаях (например, шаровой сектор II рода) можно воспользоваться аддитивностью объёма.

3. Полезно в конспекте вывести формулу объёма тела, получаемого при вращении фигуры, ограниченной графиками $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, где, к примеру, $f_1(x) > f_2(x) \geqslant 0$. Вывод прост, а формула имеет вид:

$$V = \pi\int\limits_a^b (f_1^2(x) - f_2^2(x))\,dx.$$

4. По материалам «Дополнения к главе VI» можно провести семинар. Доказательство теоремы Бойаи—Гервина вполне доступно ученикам, и можно, разбив её на соответствующие части, поручить подготовить сообщения ученикам.

5. На тему «Объёмы и площади поверхностей» стандартная программа отводит всего 20 часов. За это время можно хорошо изучить теорию, но довести умение решать задачи до достаточно высокого уровня программа не позволяет. Поэтому учителю стоит, наверное, увеличить число часов на эту тему за счёт последующих тем, но при этом понимать, что окончательная отработка навыков решения будет проходить на фоне остальных тем и завершится при итоговом повторении. Это нужно учесть и при составлении зачётных работ по теме.

Задачи к § 30

При решении задач этого параграфа особое внимание следует уделить именно геометрическим вопросам: анализу конфигурации, классическому вопросу «Куда падает высота?». В связи с этим полезно напомнить учащимся соответствующие результаты из § 23.

Следует обратить внимание на большое количество однотипных задач, связанных с нахождением наибольших и наименьших объёмов. По мнению авторов, подобными задачами не следует злоупотреблять, так как они не являются геометричными и служат, скорее, иллюстрацией мощи аналитических методов. В эскизах решений таких задач всюду, где было возможно, мы сочли нужным не прибегать к исследованию с помощью производной (особенно это касается задач **30.36**, **30.39**, **30.48**).

Любопытно и поучительно использование сопровождающего параллелепипеда в решении задачи **30.15**. Обращаем также внимание на приведённую формулу для объёма треугольного призматического клина в решении задачи **30.28**.

30.2. Можно провести широко известное доказательство: для достаточно «длинных» призм провести поперечное сечение и перенести одну из получившихся частей, приставив её верхним основанием к нижнему основанию другой призмы. Получится прямая призма, равновеликая исходной, у которой основание равно поперечному сечению исходной призмы, а боковая сторона равна ребру исходной призмы (рис. 61).

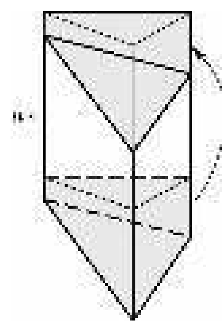

Рис. 61

Другое доказательство состоит в том, что угол φ между плоскостью поперечного сечения и плоскостью основания такой же, как между перпендикулярами к этим плоскостям — ребром призмы и её высотой. Тогда при переходе от площади поперечного сечения к площади основания нужно первую площадь поделить на cos φ, а при переходе от длины ребра к высоте умножить длину ребра на cos φ.

30.3. а) Воспользуемся формулой для объёма тела вращения. Шаровой сегмент представляет собой тело, полученное вращением части окружности (графика функции $y = \sqrt{R^2 - x^2}$) вокруг оси абсцисс. Имеем:

$$V = \pi \int\limits_{R-H}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right).$$

б) Нужно просто к объёму шарового сегмента прибавить объём конуса. Высота конуса равна $R - H$, радиус основания равен $\sqrt{2RH - H^2}$. Проделав необходимые вычисления, получим $V = \dfrac{2\pi R^2 H}{3}$.

в) Объём шара можно получить, приняв в обеих формулах $H = 2R$. Если эти формулы помнятся нечётко, то факт получения формулы объёма шара из них является одним из способов самоконтроля и самопроверки.

30.4. Рассматривая систему координат в плоскости фигуры F, имеем уравнение $y = r$. Объём тела вращения фигуры F равен разности объёмов тел вращения её верхней и нижней частей. Тогда по формуле для объёма тел вращения с учётом симметричности фигуры F имеем:

$$V = \pi\int_a^b ((r + f(x))^2 - (r - f(x))^2)\,dx =$$

$$= 4\pi r\int_a^b f(x)dx = 2\pi r \cdot 2\int_a^b f(x)\,dx = LS.$$

Здесь $y = f(x)$ — уравнение верхней части границы фигуры F, если ось симметрии — ось абсцисс.

30.5. Наиболее естественно, видимо, доказать эту теорему последовательно от частных фигур к фигурам более общего вида.

Непосредственно по теореме об объёме цилиндра проверяем верность теоремы в случае, когда вращаемая фигура — прямоугольник, сторона которого параллельна оси вращения.

Проверим утверждение для фигуры, составленной из двух таких прямоугольников. Пусть M_1, M_2 — центры масс двух прямоугольников.

Центр масс их объединения лежит на отрезке M_1M_2, деля его пропорционально площадям. Тогда объём рассматриваемой фигуры будет равен $2\pi(l_1S_1 + l_2S_2)$, где l_1, l_2 — расстояния от точек M_1 и M_2 до оси вращения, S_1, S_2 — площади прямоугольников. С другой стороны, расстояние от центра масс всей фигуры до оси равно $\dfrac{l_1S_1 + l_2S_2}{S_1 + S_2}$. Проверкой убеждаемся, что формула Паппа—Гюльдена верна и в этом случае.

Для случая фигуры, составленной из нескольких таких прямоугольников, доказательство проводим по индукции, последовательно прибавляя к фигуре по прямоугольнику (доказательство дословно совпадает с приведённым выше доказательством для случая двух прямоугольников, так как последнее обобщается на случаи объединения любых фигур, для которых верна формула Паппа—Гюльдена).

Разделим теперь фигуру прямыми, перпендикулярными оси вращения, на n равных частей. Каждую часть можно заключить в прямоугольник и вокруг этой части описать прямоугольник со сторонами, идущими по разбивающим прямым (рис. 62). Тогда искомый объём будет заключён

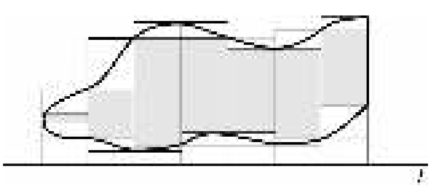

Рис. 62

между объёмами тел вращения внешней и внутренней ступенчатой фигуры. При большом значении n разница между объёмами, а также площадями ступенчатых фигур мала. Центры масс указанных ступенчатых фигур при этом будут близки к центру масс исходной фигуры F. Переходя к пределу, получаем требуемую формулу для объёма тела вращения.

30.6. а) Можно найти площадь правильного n-угольника в основании, а затем воспользоваться формулой для объёма пирамиды.

б) По стороне и боковому ребру найти высоту, а затем воспользоваться п. «а».

в) Найти боковую сторону из равнобедренного треугольника боковой грани и воспользоваться п. «б».

г) Найти r — радиус вписанной окружности основания, затем высоту пирамиды как $r\operatorname{tg}\varphi$. Далее воспользоваться п. «а».

д) Найти радиус описанной окружности основания (как проекцию бокового ребра), а затем сторону основания. Далее воспользоваться п. «а».

е) Из теоремы косинусов для трёхгранного угла, составленного рёбрами основания и боковым ребром, найти плоские углы при основании: $\cos\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right) = \cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\varphi$, где φ — известный двугранный угол, а α — искомый плоский угол при основании. Теперь можно найти сторону основания, а затем воспользоваться п. «б».

ж) Пусть a — сторона основания. Тогда составим уравнение для a: $h^2 = \left(\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$. Найдя a, пользуемся результатом п. «а».

В понятных обозначениях ответы таковы:

а) $\frac{\pi a^2}{12} H\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$;

б) $\dfrac{na^2\cos\frac{180^\circ}{n}}{24\sin^2\frac{180^\circ}{n}}\sqrt{4l^2\sin^2\frac{180^\circ}{n} - a^2}$;

в) $\dfrac{na^3\cos\frac{180^\circ}{n}}{24\sin^2\frac{180^\circ}{n}\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{180^\circ}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)}$;

г) $\frac{na^3}{24}\operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}\sin\varphi$;

д) $\frac{\pi l^3}{6}\sin\alpha\cos^2\alpha\sin\frac{360^\circ}{n}$;

$$\text{е) } -\frac{1}{3}\, nl^3\, \frac{\cos\left(\frac{\mu}{2}+\frac{180^\circ}{n}\right)\cos\left(\frac{\mu}{2}-\frac{180^\circ}{n}\right)\operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{\mu}{2}}{\sin^3\frac{\mu}{2}};$$

$$\text{ж) } \frac{nH^3}{6}\cdot\frac{\sin\frac{360^\circ}{n}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{180^\circ}{n}\right)\sin\left(\frac{180^\circ}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

При решении полезно обратить внимание на неотрицательность подкоренных выражений и связь между различными пунктами.

30.7. а) Достроим усечённую пирамиду до исходной. Из соображений подобия найдём высоту исходной пирамиды, затем вычтем из объёма исходной пирамиды объём верхней части.

б) Достроив до пирамиды, найдём радиус описанной окружности основания, затем боковое ребро большой пирамиды и верхней пирамиды. Далее, пользуясь п. «б» предыдущей задачи, найдём искомый объём.

в) Достроив до пирамиды, воспользуемся п. «г» предыдущей задачи и найдём объёмы пирамид. После вычитания получим искомый объём.

г) Достроим до пирамиды и воспользуемся п. «е» предыдущей задачи.

д) Найдём косинус двугранного угла при основании из того, что площадь нижнего основания равна площади верхнего с прибавленной проекцией боковых граней. Осталось разделить разность площадей нижнего и верхнего оснований на суммарную площадь боковых граней.

По площадям оснований легко находятся их стороны (так как основания — правильные многоугольники). Теперь пользуемся п. «в».

30.8. Если известны стороны основания, то можно найти площадь и радиус описанной окружности $\left(R=\frac{abc}{4S}\right)$. По радиусу и углу наклона находим высоту ($h = R\sin\varphi$).

30.9. По рёбрам и углам находим стороны основания пирамиды, затем и его площадь. По сторонам находим углы основания, после чего находим из трёхгранного угла при основании угол между боковым ребром и плоскостью основания (см. решение задачи **23.14**). После этого находим высоту.

Приведённое решение может упроститься, если за основание принять боковую грань пирамиды.

30.10. Заметим, что из условия следует $AD \perp (APB)$ (рис. 63). Тогда $BC \perp (APB)$, $PB \perp (ABC)$, т. е. PB — высота пирамиды. Следует отметить, что условие $PC \perp CD$ получается автоматически из теоремы о трёх перпендикулярах.

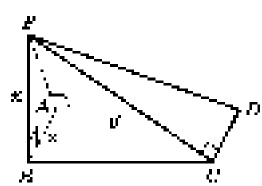

Рис. 63

Теперь можно составить систему уравнений: $\begin{cases} |PB| \cdot |PC| = 2S_1, \\ |PB| \cdot |BC| = 2S_2, \\ |AB| \cdot |BC| = S, \end{cases}$

решив которую, найдём, в частности, $|PB|$. Отсюда найдём объём пирамиды.

Из решения видно, что для нахождения объёма необходимо знать площадь основания и двух граней, прилежащих к высоте. Площади остальных граней являются избыточными данными.

30.11. Если это смежные грани, то необходимо измерить лишь высоту трапеции (ребро пересечения этих граней). Если эти грани противоположные, то они проходят через боковые рёбра трапеции (в противном случае они были бы параллельны). Тогда можно измерить все стороны одной из этих граней, затем найти её (грани) высоту из вершины пирамиды. Она будет высотой пирамиды как перпендикуляр на ребро прямого двугранного угла, лежащий в одной из граней. Эта высота является отрезком линии пересечения плоскостей, перпендикулярных основанию. После нахождения высоты с известной площадью основания находим объём пирамиды.

30.12. Объём шарового пояса равен объёму всего шара без объёмов двух сегментов, отсекаемых плоскостями — границами пояса. При этом высоту сегментов по радиусу основания и радиусу шара легко можно найти: $h = R - \sqrt{R^2 - r^2}$, где R — радиус шара, r — радиус основания сегмента. Остаётся подставить найденные значения в формулы задачи **30.3**.

30.13. а) Опустим высоту призмы из вершины A_1 (рис. 64). Тогда H — основание высоты будет лежать на биссектрисе угла BAC. Опустим из H перпендикуляр HH_1 на сторону AC. По теореме о трёх перпендикулярах $A_1H_1 \perp AC$, тогда $\left|AH_1\right| = d_2 \cos\varphi$,

$$|AH| = \frac{AH_1}{\cos 30^\circ} = \frac{2d_2 \cos\varphi}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда по теореме Пифагора получаем $\left|A_1H\right| = d_2 \sqrt{1 - \frac{4\cos^2\varphi}{3}}$ и находим объём призмы: $V = \frac{1}{4} d_1^2 d^2 \sqrt{3 - 4\cos^2\varphi}$.

б) Здесь дело обстоит ещё проще. Опустим высоту B_1H из вершины B_1. Так как $BB_1 \perp BC$, то $BH \perp BC$ по теореме о трёх перпендикулярах. Тогда $\angle B_1BH = \varphi$ и $\left|B_1H\right| = d_2 \sin\varphi$, а объём призмы равен $V = \frac{\sqrt{3}}{4} d_1^2 d_2 \sin\varphi$.

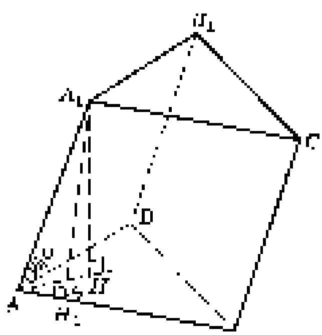

Рис. 64

30.14. Высота находится так же, как в п. «а» предыдущей задачи с заменой угла в основании 60° на φ: $h = d\sqrt{1-\dfrac{\cos^2\varphi}{\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}}$. Таким образом, для объёма получаем формулу: $V = d^3\sin\varphi\sqrt{1-\dfrac{\cos^2\varphi}{\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}}$.

30.15. Рассмотрим тетраэдр, вершина которого — вершина параллелепипеда, а три ребра из этой вершины — рёбра параллелепипеда (следовательно, другие три ребра — диагонали граней). Тогда объём такого тетраэдра равен $\frac{1}{6}$ объёма исходного параллелепипеда (у них одинаковые высоты, площадь основания тетраэдра равна полуплощади основания параллелепипеда, и в формуле объёма для тетраэдра присутствует коэффициент $\frac{1}{3}$) .

Теперь рассмотрим тетраэдр, для которого данный параллелепипед является сопровождающим. Его объём равен $\frac{1}{3}$ объёма параллелепипеда (для нахождения этого объёма нужно вычесть из объёма параллелепипеда объёмы четырёх тетраэдров, описанных в предыдущем абзаце).

Заметим теперь, что тетраэдр, для которого исходный параллелепипед был сопровождающим, станет в новом параллелепипеде тетраэдром, построенным на рёбрах, выходящих из одной вершины. Тем самым отношение объёмов старого и нового параллелепипедов равно 2.

30.16. а) Если отлили половину воды, то остался заполненный водой конус, объём которого равен половине исходного объёма воды. Оставшийся конус подобен исходному, значит, его линейные размеры уменьшились в одинаковое число раз, т. е. в $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

б) Из тех же соображений, что и в п. «а», получаем о т в е т: $\frac{1}{8}$.

30.17. Очевидно, что объёмы получившихся конусов будут относиться так же, как площади их оснований (поскольку высота у этих конусов одна и та же).

а) Проведём осевое сечение конуса, перпендикулярное плоскости нашего сечения. Угол между высотой и линией пересечения указанной плоскости с плоскостью, данной в задаче, составит 45°. Расстояние от центра основания до хорды (пересечения основания с данной плоскостью) равно 1. Тогда эта хорда стягивает в окружности основания угол 60°.

Вычислив отношение площадей полученных круговых сегментов, получим о т в е т: $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{4\pi - 3\sqrt{3}}{8\pi + 3\sqrt{3}}$.

б) Проведя такое же осевое сечение, как и в п. «а», получим расстояние от центра основания до хорды пересечения основания с данной в условии плоскостью, которое составит $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Тогда получаем о т в е т:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi - \arcsin\dfrac{\sqrt{11}}{6} - \dfrac{\sqrt{11}}{6}}{\pi + \arcsin\dfrac{\sqrt{11}}{6} + \dfrac{\sqrt{11}}{6}}.$$

в) Если в сечении получился прямоугольный треугольник, то он равнобедренный. При этом его боковая сторона равна образующей конуса, т. е. $\sqrt{5}$, отсюда хорда окружности равна $\sqrt{10}$. После этого действуем, как в предыдущих пунктах, и получаем о т в е т:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi - \arcsin\dfrac{\sqrt{15}}{4} - \dfrac{\sqrt{15}}{4}}{\pi + \arcsin\dfrac{\sqrt{15}}{4} + \dfrac{\sqrt{15}}{4}}.$$

г) Это означает, что описанная выше хорда окружности равна образующей, т. е. её длина равна $\sqrt{5}$. Действуя далее так же, как в предыдущих пунктах, получаем о т в е т:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\arcsin\dfrac{\sqrt{55}}{8} - \dfrac{\sqrt{55}}{8}}{2\pi - \arcsin\dfrac{\sqrt{55}}{8} + \dfrac{\sqrt{55}}{8}}.$$

В качестве примечания к пп. «б» и «в» отметим, что вычислялся центральный угол, опирающийся на данную хорду, через его синус. В указанных пунктах этот угол тупой, поэтому вместо его арксинуса взято значение смежного угла.

30.18. Проще всего найти высоту по формуле $h = \dfrac{3V}{S}$. Для этого найдём объём тетраэдра, приняв за основание одну из боковых граней (они равнобедренные прямоугольные треугольники с боковой стороной $\dfrac{d}{\sqrt{2}}$). Получим $V = \dfrac{d^3}{12\sqrt{2}}$. Тогда $h = \dfrac{d}{\sqrt{6}}$.

30.19. Так как боковые рёбра равны, вершина проектируется в центр описанной окружности основания, т. е. в середину гипотенузы. Рассмотрим боковые высоты (длину их обозначим через h_1) в гранях, проходящих через катеты основания. Треугольник, образованный этими высотами и гипотенузой основания, равнобедренный с углом φ при вершине и основанием $d\sqrt{2}$, значит, $h_1 = \dfrac{d}{\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}}$.

Пусть ψ — угол при основании боковой грани, проходящей через катет. Тогда $\sin\psi = \dfrac{h_1}{d} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}}$. Длина бокового ребра вычисляется по формуле: $d_1 = \dfrac{d}{2\cos\psi} = \dfrac{d\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{-2\cos\varphi}}$. Высоту пирамиды находим из теоремы Пифагора: $h = \dfrac{d\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{-2\cos\varphi}}$. Отсюда находим объём пирамиды:

$$V = \frac{d^3\cos\frac{\varphi}{2}}{6\sqrt{-2\cos\varphi}}.$$

30.20. а) Если $(PAB)\perp(PBC)$, то по теореме косинусов для трёхгранного угла данной пирамиды с вершиной B получаем $\cos\angle PBA\cdot\cos\angle PBC = 0$. Тогда один из этих углов прямой. Так как $\angle PBC \neq 90°$, получаем $\angle PBA = 90°$, значит, $AB\perp(PBC)$. Рассматривая PBC как основание пирамиды, а AB как её высоту, получим $V = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

б) Заметим, что перпендикуляр из вершины B на AP будет перпендикуляром ко всей плоскости APC. Для нахождения длины этого перпендикуляра и площади грани APC реализуем следующий план (сопровождаемый, правда, излишне громоздкими вычислениями):

1) Обозначим $\angle APB = \angle PAB = x$, $\angle APC = y$, $\angle PAC = z$.

2) Запишем теорему синусов в треугольнике APC:

$$\frac{4}{\sin z} = \frac{\sqrt{13}}{\sin y}. \qquad (*)$$

3) Теперь подсчитаем $\cos\angle BPC = \dfrac{11}{16}$, $\cos\angle BAC = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

4) Запишем теорему косинусов для трёхгранного угла с вершиной P:

$$\cos\angle BPC = \cos x\cos y, \qquad (**)$$

и для трёхгранного угла с вершиной A:

$$\cos\angle BAC = \cos x\cos z. \qquad (***)$$

5) Решив систему уравнений (*), (**), (***), получим значения косинусов углов, затем высоту из вершины B, площадь грани APC и наконец, объём.

Не приводя вычислений, заметим, что система имеет решением $\cos x = \frac{\sqrt{19}}{4}$, т. е. исходного тетраэдра не существует.

30.21. Полученный многогранник является тетраэдром $ABCD$ (рис. 65). Так как ребро AB одного угла перпендикулярно ребру CD другого угла, через AB можно провести плоскость, перпендикулярную CD. Пусть M — точка пересечения указанной плоскости с CD.

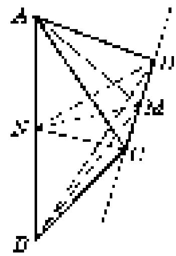

Рис. 65

Из условия получаем $\angle ABM = \angle BAM$, т. е. треугольник ABM равнобедренный. При этом высота MN треугольника по длине равна расстоянию между рёбрами двугранных углов, т. е. d. Заметим также, что $AM \perp CD$, $BM \perp CD$, отсюда $\angle AMB = 90°$ как линейный угол двугранного угла. Тогда $|AM| = |BM| = d\sqrt{2}$, $|AN| = |BN| = d$. Проведя аналогичные рассуждения относительно плоскости CDN, получим $|CM| = |DM| = d$. Объём тетраэдра $ABCD$ найдём как сумму объёмов тетраэдров $ABCM$ и $ABDM$. Получим $V = \frac{d^3}{3}$.

30.22. Указанные плоскости есть плоскости симметрии правильного тетраэдра. Они попарно перпендикулярны между собой и пересекаются в центре правильного тетраэдра. Тогда части, на которые тетраэдр делится указанными плоскостями, одинаковы, и их 8. Итак, о т в е т: $\frac{1}{8}$.

30.23. а) $\frac{1}{6}$, так как высота та же, что у параллелепипеда, а площадь основания вдвое меньше.

б)—е) Аналогично п. «а» с тем же ответом.

ж) Получается вырезанием из параллелепипеда четырёх тетраэдров из предыдущих пунктов. О т в е т: $\frac{1}{3}$.

з) Если одно ребро тетраэдра уменьшить втрое, а две другие вершины оставить неизменными, объём тетраэдра уменьшится втрое. Это следует, например, из решения задачи **30.15**. Таким образом, о т в е т в данной задаче: $\frac{1}{27}$.

30.24. Так как три боковых ребра равны, вершина проектируется в центр окружности, описанной около треугольника с вершинами в концах этих рёбер. Так как вершинами этого треугольника являются вершины квадрата, то центр его описанной окружности — центр квадрата. Тогда четвёртое боковое ребро тоже имеет длину d и пирамида является правильной. Более того, она является половиной правильного октаэдра, поэтому её высота равна половине диагонали основания. О т в е т: $V = \frac{d^3}{3\sqrt{2}}$.

30.25. Рассмотрим высоту PO в треугольнике BPD. Так как этот треугольник равносторонний, точка O есть середина BD, т. е. центр ромба. Кроме того, так как $(BPD) \perp (ABC)$, BO есть высота пирамиды. Отсюда легко находим $V = \frac{d_1 d_2^2}{4\sqrt{3}}$.

30.26. Рассмотрим развёртку на рисунке 66, *а*. Так как три угла при вершине P прямые, то тетраэдр — прямоугольный. Его объём $\frac{|PA| \cdot |PB| \cdot |PC|}{6} = \frac{d^3}{24}$. Другой вариант развёртки (рис. 66, *б*) невозможен, так как тетраэдр получается вырожденным.

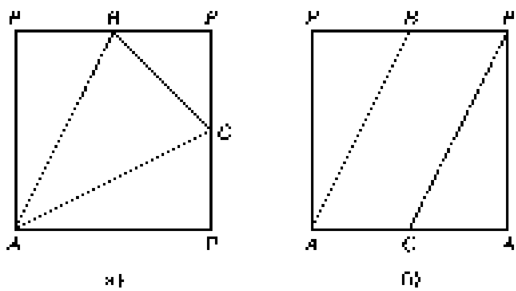

Рис. 66

30.27. Заметим, что площадь основания пирамиды равна 9.

а) Если грань перпендикулярна основанию, то высота пирамиды лежит в этой грани. Сторона квадрата равна 3. Значит, площадь этой боковой грани равна $\frac{3}{2}$. Однако площади оставшихся боковых граней при данных высоте и основании могут меняться в зависимости от того, где именно находится вершина пирамиды. Если, например, перпендикулярная грань — равнобедренный треугольник, то площадь развёртки равна $\frac{21}{2} + \frac{3}{2}(\sqrt{13} + \sqrt{10})$, в то время как в п. «б», условие которого является частным случаем п. «а», ответ будет другим. Таким образом, данных задачи недостаточно для получения единственного ответа.

б) Если указанные грани будут смежными, то ребро их пересечения и будет высотой пирамиды. Тогда две другие боковые грани являются равными прямоугольными треугольниками (с катетами 3 и $\sqrt{10}$). Поэтому полная площадь развёртки равна $12 + 3\sqrt{10}$.

Несмежные грани не могут быть перпендикулярны основанию, так как линия их пересечения должна быть, с одной стороны, параллельна рёбрам квадрата, через которые эти грани проходят (а следовательно, быть параллельной плоскости основания), а с другой — быть перпендикулярной плоскости основания.

в) Вершина проектируется в центр вписанной окружности основания, но он же есть центр описанной окружности, а значит, боковые рёбра равны, т. е. пирамида правильная. Апофему пирамиды легко находим по теореме Пифагора: $h = \sqrt{\frac{13}{4}}$. Тогда площадь развёртки равна $9 + 3\sqrt{13}$.

г) Условия недостаточно для нахождения ответа. Действительно, в п. «в» был рассмотрен частный случай такой пирамиды, для которого получен ответ. Заметим, что если рассмотреть очень узкий прямоугольник (площадь которого по-прежнему равна 9), то получаем практически бесконечную площадь двух невырожденных боковых граней (их апофема примерно 1, а основание весьма велико). Следовательно, однозначный ответ получить нельзя.

30.28. Объём части, примыкающей к основанию, больше (он равен $\frac{5}{8}$ объёма пирамиды). Для доказательства этого проведём через точки K и L плоскости, перпендикулярные (ABC) и параллельные AD. Нижняя часть пирамиды распадается на прямую призму и две пирамидки (рис. 67). При этом площадь основания призмы равна половине площади сечения пирамиды плоскостью, проходящей через P параллельно проведённым сечениям, а высота призмы равна половине стороны основания пирамиды.

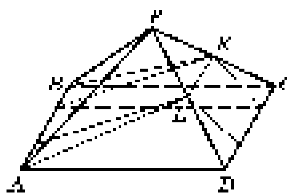

Рис. 67

Тогда объём призмы равен $\frac{hd^2}{8}$, где h — высота, а d — сторона основания исходной пирамиды.

Склеив две пирамидки гранями, примыкающими к основаниям призмы, получим новую пирамиду, основание которой по площади в 2 раза меньше основания исходной пирамиды, а высота равна половине высоты исходной пирамиды. Объём этой пирамиды равен четверти объёма исходной.

Сложив найденные объёмы, получаем требуемое.

З а м е ч а н и е. Такая задача и ей подобные решаются особенно просто с помощью формулы объёма трёхгранного *призматического клина* (тела, ограниченного призматической треугольной поверхностью и двумя необязательно параллельными плоскостями, эту поверхность пересекающими). Именно: $V = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \cdot S$. Здесь a_1, a_2, a_3 — параллельные рёбра призматического клина, S — площадь перпендикулярного сечения призматической поверхности.

Кроме того, отметим, что нигде не использовалось то, что пирамида была правильной. Было использовано лишь то, что KL — средняя линия, и то, что в основании квадрат.

30.29. Получился октаэдр. При этом он делится на две равные части плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер параллелепипеда (так как эта плоскость проходит через центр параллелепипеда, а октаэдр в силу симметричности построения также симметричен относительно центра параллелепипеда). Объём половины октаэдра вычисляется как объём четырёхугольной пирамиды, высота которой равна половине высоты параллелепипеда, а основание подобно основанию параллелепипеда с коэффициентом $\dfrac{1}{2}$. Тогда объём указанной пирамиды составляет $\dfrac{1}{24}$ часть объёма параллелепипеда, значит, объём октаэдра составляет $\dfrac{1}{12}$ часть объёма параллелепипеда.

30.30. а) Рассмотрим, какой мог образоваться правильный многоугольник. Если в этом многоугольнике есть части рёбер тетраэдра, то тогда угол между ними (60° или 120°) должен быть кратен внешнему углу полученного правильного многоугольника (так как в правильном многоугольнике угол между его рёбрами равен внешнему углу, умноженному на количество рёбер между взятыми, считая последнее ребро). Но число рёбер многоугольника не более шести (три ребра тетраэдра и три следа плоскостей). Следовательно, это либо шестиугольник, либо треугольник. Однако треугольной грани с участием рёбер тетраэдра быть не может (тогда нет остальных рёбер). Итак, если в правильном многоугольнике участвуют рёбра тетраэдра, то это правильный шестиугольник. Значит, от каждой вершины отсекли правильный тетраэдр с ребром, равным трети ребра исходного. Отсюда объём полученного многогранника равен $\dfrac{23}{27}$ объёма исходного тетраэдра.

Другой случай — если на гранях тетраэдра высечены треугольники. Первый раз такой случай наступит, когда плоскости будут проходить через средние линии граней. В результате отсечения получится правильный октаэдр, объём которого равен половине объёма исходного тетраэдра. Продолжая придвигать плоскости параллельно граням, получим серию многогранников более сложной формы. Поэтому конечного числа ответов задача не имеет.

б) Для куба на гранях могут появиться восьмиугольники (в силу аналогичных рассуждений). Тогда объём оставшейся части равен $\frac{77}{81}V$ (так как от каждой вершины отрезается правильный прямоугольный тетраэдр, боковое ребро которого равно трети ребра куба). Также на грани может остаться квадрат (получится кубооктаэдр объёмом $\frac{5}{6}V$, если плоскости будут проходить по средним линиям грани, высекая на ней срединный квадрат), при этом многогранники будут получаться различного объёма.

30.31. Пусть M — точка пересечения PC и QA. Тогда искомый объём вычисляется по формуле $V = V_{PABCD} + V_{QABCD} - V_{MABCD}$ (вычитание V_{MABCD} необходимо, так как объём общей части при сложении был подсчитан дважды). Для получения ответа осталось заметить, что высота из M на $ABCD$ равна 1 (так как M — центр прямоугольника $APQC$). О т в е т: $V = 1$.

30.32. а) Воспользуемся результатом задачи **30.28** (с учётом замечания). Тогда, так как MN есть средняя линия грани PBC, искомый объём равен $\frac{5}{8}$ объёма $PABCD$, т. е. $\frac{5}{24}$ (рис. 68, *а*).

б) В этом пункте ситуация ещё проще, так как общей частью является пирамида с высотой $\frac{1}{2}$ (рис. 68, *б*). О т в е т: $V = \frac{1}{6}$.

в) Здесь общей частью также является пирамида (рис. 68, *в*). Однако её высота равна $\frac{2}{3}$ (она параллельна PM и QN, при этом точка падения

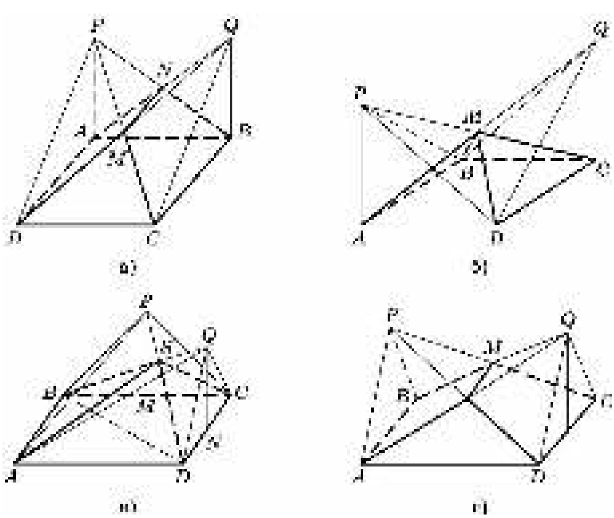

Рис. 68

высоты является центром масс треугольника BCD, откуда и получаем искомое соотношение). Тогда искомый объём равен $\frac{2}{9}$.

г) Здесь пересечением является призматический клин, причём к нему применимы соображения из п. «а», а значит, ответ такой же (рис. 68, *г*).

30.33. Если ребро пирамиды равно a, то ребро указанного куба найдено в решении задачи **V.7**: $x = \frac{a}{1+\sqrt{2}}$. После этого нетрудно найти объём куба через ребро пирамиды, а затем и отношение объёмов куба и пирамиды. Оно равно $\frac{3\sqrt{2}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^3}$.

Решение не имеет принципиальных различий, если вершины куба находятся на апофемах. Ребро куба получается из соотношения подобия в сечении, проходящем через две противоположные апофемы: $x : \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a-x}{a}$. Отсюда находим ребро куба $x = \frac{a}{1+\sqrt{2}}$. Таким образом, отношение объёмов то же самое.

30.34. Очевидно, эта часть равна $1-(0{,}9)^3$. Если радиус меньшей сферы равен xR, то решение получится из уравнений $1 - x^3 = \frac{1}{4}$ и $1 - x^3 = \frac{1}{2}$.

30.35. Решение этой задачи аналогично решению задачи **28.12**. Заметим, что из соображений подобия (рис. 69) $\frac{h}{H} = \frac{R_1 - r}{R_1 - R_2}$ (здесь R_1, R_2 — радиусы оснований конуса, H — его высота). Получим формулу объёма для цилиндра как функцию от радиуса основания. Взяв производную, найдём, что объём будет максимальным при $r = \frac{2}{3}R_1$. Если при этом $R_2 > \frac{2}{3}R_1$, то наибольшим будет объём у цилиндра, основание которого совпадает с верхним основанием конуса.

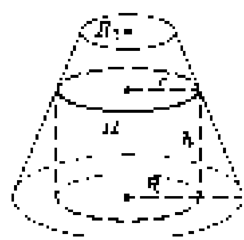

Рис. 69

30.36. Рассмотрим сечение параллелепипеда, перпендикулярное ребру d. Его следы (их длины назовём h_1 и h_2) на данных гранях будут являться их высотами. При этом $h_1 = \frac{S_1}{d}$, $h_2 = \frac{S_2}{d}$. Тогда, так как поперечное сечение — параллелограмм, его площадь будет наибольшей, если при ребре d угол будет прямым. Объём, равный площади поперечного сечения, умноженной на d, будет в этом случае также наибольшим. О т в е т: $V_{\max} = \dfrac{S_1 S_2}{d}$.

30.37. Эта задача, как и предыдущая, развивает пространственное мышление ученика и на простом примере знакомит с комбинаторикой в геометрии.

Могут представиться два случая:

1) Квадратными являются все грани, кроме двух параллельных. Тогда эти параллельные можно считать основаниями параллелепипеда, который будет прямым. В основаниях лежат ромбы со стороной d. Объём будет наибольшим, если эти ромбы — квадраты, т. е. у куба.

2) Если расположение квадратных граней иное, то параллелепипед сразу является кубом (так как для любой грани есть квадратная, параллельная ей грань).

Итак, в обоих случаях о т в е т получился d^3.

30.38. Полезно эту задачу сравнить с задачей **28.7**.

а) Пусть S — площадь осевого сечения конуса. Тогда $h = \dfrac{S}{r}$ (h — высота конуса, r — радиус его основания), $V = \dfrac{1}{3}\pi r S$. Таким образом, объём конуса может быть сколь угодно большим.

б) Пусть l — образующая конуса. Тогда $r = \sqrt{l^2 - h^2}$, откуда $V = \dfrac{1}{3}\pi(l^2 - h^2)h$. Взяв производную по h, получим наибольший объём (при $h = \dfrac{l}{\sqrt{3}}$), равный $V = \dfrac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}$.

30.39. а) Эта пирамида правильная. Пусть угол между боковыми рёбрами равен α. Находим объём так, как описано в решении задачи **30.6**. Сторона основания равна $2d\sin\dfrac{\alpha}{2}$, радиус описанной окружности основания равен $\dfrac{2d}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\alpha}{2}$, откуда высота равна $\dfrac{d}{\sqrt{3}}\sqrt{3 - 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$. Тогда для вычисления объёма получим формулу:

$$V = \frac{1}{3}d^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Взяв производную (лучше всего брать производную не от самой функции V, а от V^2, приняв за переменную $\sin^2\alpha$; промежутки монотонности при возврате к переменной α не изменятся), получим, что объём будет наибольшим при $\alpha = 90°$, и окажется равным $\dfrac{d^3}{6}$.

Тот же самый результат можно было получить проще, приняв за основание одну из боковых граней. Тогда её площадь не больше $\frac{d^2}{2}$, а высота на неё не больше d. В случае прямоугольного тетраэдра в обоих неравенствах достигается равенство, значит, его объём наибольший.

б) Если принять одну из таких граней за основание, то объём будет тем больше, чем больше высота на эту грань. Но высота на грань не больше любого отрезка, соединяющего вершину с точкой грани, в том числе высоты второго равностороннего треугольника. Если плоскость второго треугольника перпендикулярна плоскости первого, то его высота будет высотой пирамиды. Тогда объём будет наибольшим и равным $\frac{d^3}{8}$.

в) Эти четыре ребра могут располагаться в виде двух равнобедренных треугольников с общим основанием (необязательно равным d) или в виде равностороннего треугольника и ещё ребра d. Во втором случае сразу ясно, что объём наибольший, если оставшееся ребро перпендикулярно плоскости равностороннего треугольника. Тогда объём равен $\frac{d^3}{4\sqrt{3}}$.

В первом случае при фиксированном общем основании этих равнобедренных треугольников, рассуждая аналогично предыдущему пункту, получаем, что объём наибольший, если плоскость одного из них перпендикулярна плоскости другого. Разрешим теперь общему основанию меняться (пусть его переменная длина равна $2x$). Пусть h — высота равнобедренного треугольника. Тогда $h^2 = d^2 - x^2$. Объём будет равен:

$$V = \frac{1}{3}xh^2 = \frac{1}{3}x(d^2 - x^2).$$

Взяв производную по x (или посмотрев результат задачи **30.38б**), получим, что объём наибольший при $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ и равен $\frac{d^3}{9\sqrt{3}}$.

г) Имеются четыре различных случая расположения рёбер длины 2 и 3 (рис. 70). За основу классификации можно взять расположение рёбер длины 2. Либо среди них нет скрещивающихся (т. е. они выходят из одной вершины или образуют треугольник), либо есть пара скрещивающихся, тогда третье ребро их соединяет. В последнем случае возможны два принципиально разных расположения рёбер длины 3.

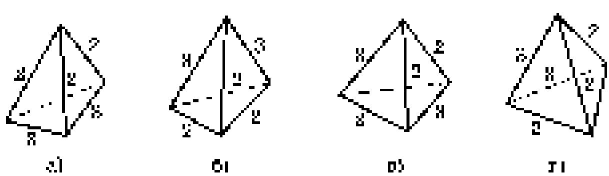

Рис. 70

Все указанные случаи разбираются абсолютно одинаково. Тетраэдр, составленный из пары треугольников (в котором свободно лишь одно ребро), имеет наибольший объём, если плоскости этих треугольников перпендикулярны.

В результате простым перебором (надо выбрать наибольшее из чисел $\frac{21}{16}$, $\sqrt{\frac{8}{3}}$, $\sqrt{\frac{14}{9}}$) получаем о т в е т: $V_{\max} = \sqrt{\frac{8}{3}}$.

30.40. а) Наибольший объём будет при наибольшей высоте треугольника PBC, так как она является высотой тетраэдра. Обозначим точку падения высоты через H. Тогда $|PH|^2 = d_2^2 - |AH|^2$. Итак, чем меньше $|AH|$, тем больше высота, а значит, и объём. Но наименьшим $|AH|$ будет, если $AH \perp BC$. Отсюда $|PH| = \sqrt{d_2^2 - \frac{3}{4}d_1^2}$ и

$$V_{\max} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\, d_1^2 \sqrt{d_2^2 - \frac{3}{4}d_1^2}\,.$$

б) Проведём высоту CH на AB в треугольнике ABC. Заметим, что PH в силу теоремы о трёх перпендикулярах будет высотой в APC. Тогда $V = \frac{1}{6}|PC| \cdot |CH| \cdot d$. При этом $|PC|^2 + |CH|^2 = \frac{d^2}{2}$. Выразив $|PC|$ через $|CH|$ и взяв производную от получившейся функции для объёма, найдём $V_{\max} = \frac{d^3}{24}$.

30.41. Это значит, что сумма ребра основания и бокового ребра равна 1. Пусть x — ребро основания пирамиды. Тогда её высота равна $\sqrt{(1-x)^2 - \frac{x^2}{3}}$. Составив функцию для объёма и продифференцировав её, найдём, что наибольшим объём будет при $x = \frac{1}{2}$. О т в е т: $\frac{1}{48\sqrt{2}}$.

30.42. а) Это в точности задача **30.39а** для $d = 1$. О т в е т: $V = \frac{1}{6}$.

б) Рассмотрим пирамиду, которая образована апофемами. Её объём равен, очевидно, четверти объёма исходной пирамиды (высота та же, а в основании лежит серединный треугольник). Для полученной пирамиды имеем задачу п. «а». Таким образом, наибольший объём исходной пирамиды равен $\frac{2}{3}$.

30.43. Было бы интересно найти геометрическое решение этой задачи, но пока явно видно только решение средствами математического анализа.

а) Эта пирамида правильная. Пусть a — сторона основания. Тогда высота пирамиды равна $h = \sqrt{d^2 - \frac{a^2}{2}}$. Продифференцировав по a выражение для объёма, получим, что объём будет наибольшим при $a = \frac{2d}{\sqrt{3}}$ и равен $\frac{4}{9\sqrt{3}}d^3$.

б) Заметим, что высота падает в центр описанной окружности прямоугольника. Пусть a — меньшая сторона треугольника. Тогда радиус его описанной окружности равен $a\sqrt{\frac{5}{4}}$. Действуя точно так же, как в предыдущем пункте, получим, что наибольший объём достигается при $a\sqrt{\frac{8}{15}}d$ и равен $\frac{16}{45\sqrt{3}}d^3$.

30.44. Ясно, что вершины верхнего основания куба лежат на поверхности пирамиды (в противном случае её объём может быть уменьшен за счёт сжатия). Пусть высота пирамиды равна h, а ребро основания равно a. Рассмотрим правильную пирамиду с вершиной в вершине исходной пирамиды и основанием, совпадающим с верхним основанием куба. Её объём не превосходит $\left(1 - \frac{d}{h}\right)^3 V$, где V — объём исходной пирамиды. При этом равенство наступает лишь в том случае, когда основание куба является в точности сечением пирамиды. Итак, у пирамиды наименьшего объёма вершины верхнего основания куба лежат на рёбрах пирамиды. Из стандартного подобия треугольников в диагональном сечении пирамиды имеем $\frac{d}{h} = \frac{a - d}{d}$. Отсюда $\frac{1}{a} + \frac{1}{h} = \frac{1}{d}$. Далее выражаем объём через сторону основания: $V = \frac{1}{3}a^3 \frac{d}{a - d}$. Затем, продифференцировав по a, получим, что объём будет наименьшим при $a = \frac{3d}{2}$ и равен $\frac{9}{4}d^3$.

30.45. Пусть $|AB| = x$, тогда $|BD| = \sqrt{d^2 + x^2}$. Так как боковые рёбра равны, высота падает в центр основания. Высота пирамиды равна $\sqrt{\frac{3d^2 - x^2}{4}}$ и объём равен $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3d^2 - x^2}{4}}\,xd$. Взяв производную, получим максимальный объём при $x\sqrt{\frac{3}{2}}d$, равный $\frac{1}{4}d^3$.

30.46. Заметим, что вершины основания развёртки лежат на средних линиях квадрата на одинаковом удалении от его сторон (рис. 71). Тогда удвоенная апофема боковой грани в сумме со стороной основания даёт диагональ исходного квадрата, т. е. $2\sqrt{2}$. Заметим, что если сторона основания пирамиды равна $2x$, то апофема боковой грани равна $\sqrt{2}-x$, а тогда высота пирамиды равна $\sqrt{(\sqrt{2}-x)^2-x^2}=\sqrt{2-2x\sqrt{2}}$. Найдя объём как функцию от x, получим $V=\frac{4}{3}x^2\sqrt{2-2x\sqrt{2}}$. Взяв производную, находим, что наибольший объём равен $\frac{32\sqrt{2}}{75\sqrt{5}}$ при $x=\frac{2\sqrt{2}}{5}$. Наименьший объём равен 0 в вырожденном случае (основание пирамиды является серединным квадратом, остальные части заготовки — боковыми гранями).

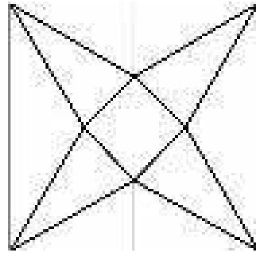

Рис. 71

30.47. Решение этой задачи ничем не отличается от решений подобных задач (см., например, задачи **28.6**, **28.9**, **28.11**). Пусть H — высота пирамиды, h — высота цилиндра, R — радиус вписанной окружности основания пирамиды, r — радиус основания цилиндра. Тогда $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$, откуда $h=\left(1-\frac{r}{R}\right)H$. Объём цилиндра как функция радиуса основания $V=\pi Hr^2\left(1-\frac{r}{R}\right)$. Взяв производную, получим, что объём будет наибольшим при $r=\frac{2}{3}R$ и равным $\frac{4\pi HR^2}{27}$. Тогда отношение объёма этого цилиндра к объёму пирамиды равно $\frac{4}{9}\pi\frac{R}{p}$, где p — полупериметр основания. Учитывая формулу для радиуса вписанной окружности правильного многоугольника, получим отношение объёмов равным $\dfrac{8\pi\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}}{9n}$.

30.48. Пусть d — диаметр, а r — радиус данного шара.

а) Наибольший объём среди всех параллелепипедов, вписанных в шар, будет у куба. Действительно, диагональ параллелепипеда, вписанного в шар, равна диаметру куба (все вписанные параллелепипеды прямоугольные, ибо вписанной в сферу может быть лишь прямая призма, а у параллелепипеда любая грань может служить боковой). Пусть x, y, z —

измерения параллелепипеда. Имеем $x^2 + y^2 + z^2 = d^2$. При этом требуется найти наибольшее значение xyz. По неравенству о среднем геометрическом и среднем квадратическом имеем $\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$, причём равенство наступает лишь при $x = y = z$. Так как левая часть постоянна, то наибольший объём будет при $x = y = z = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$. Теперь нетрудно посчитать искомое отношение. Оно равно $\dfrac{2}{\pi\sqrt{3}}$.

б) Из решения задачи **23.37** имеем формулу $R = \dfrac{h^2 + \dfrac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2\dfrac{180^\circ}{n}}{2h}$ (здесь h — высота, a — сторона основания данной пирамиды). В данном случае $n = 3$, откуда $a^2 = 24Rh - 12h^2$. Тогда объём пирамиды равен $V = \sqrt{3}\,(2Rh^2 - h^3)$. Дифференцируя объём по h, находим, что он окажется наибольшим при $h = \dfrac{4}{3}R$ и равным $\dfrac{32\sqrt{3}}{27}R^3$. Искомое отношение объёмов равно $\dfrac{8\sqrt{3}}{9\pi}$.

Следует отметить, что полученный тетраэдр является правильным (так как радиус описанной сферы равен $\dfrac{3}{4}h$, то центр сферы лежит в точке пересечения *медиатрис* тетраэдра — отрезков, соединяющих вершины с центрами масс основания. Тогда по утверждению 16 задачи **23.31** тетраэдр будет равногранным).

в) Для решения этого пункта воспользуемся той же формулой, только при $n = 4$. Проделав аналогичные преобразования, получим:

$$V = \frac{4}{3}(2Rh^2 - h^3).$$

Из этого следует, что объём будет наибольшим при $h = \dfrac{4}{3}R$ и равным $\dfrac{128}{81}R^3$. Искомое отношение равно $\dfrac{32}{27\pi}$.

д) Если цилиндр вписан в шар, то в цилиндр можно вписать прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием так, что его основания будут вписаны в основания цилиндра. Этот параллелепипед тоже будет вписан в шар. При этом отношение объёма указанного параллелепипеда к объёму цилиндра постоянно (и равно $\dfrac{2}{\pi}$). Тем самым, если объём параллелепипеда будет наибольшим, то и объём цилиндра будет наибольшим. Тогда наибольший объём цилиндра относится к объёму шара как $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

г) Рассуждения аналогичны рассуждениям из предыдущего пункта. Правильная треугольная призма наибольшего объёма будет вписана в цилиндр наибольшего объёма, при этом отношение её объёма к объёму цилиндра равно $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. Домножив на отношение, найденное в предыдущем пункте, получим о т в е т: $\frac{3}{4\pi}$.

е) Впишем в конус правильную треугольную пирамиду так, что вершина её совпадает с вершиной конуса, а основание вписано в основание конуса. Тогда отношение объёмов конуса и пирамиды равно отношению площадей их оснований и равно $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. Кроме того, пирамида оказалась вписанной в шар. Тем самым если объём конуса наибольший, то объём пирамиды тоже наибольший. Осталось домножить отношение объёмов пирамиды и шара, найденные в п. «б», на отношение объёмов конуса и пирамиды для получения о т в е т а: $\frac{32}{27}$.

Теперь, пользуясь указанными рассуждениями в обратную сторону (от конуса наибольшего объёма к пирамиде), можно без применения формулы радиуса получить, что в правильной n-угольной пирамиде наибольшего объёма, вписанной в данный шар, высота составляет $\frac{4}{3}$ радиуса шара.

30.49. а) Большой круг этого шара должен помещаться в любую из граней параллелепипеда (для доказательства достаточно спроектировать конфигурацию вдоль ребра на грань). Таким образом, нужно найти наибольший радиус круга, помещающегося в любой из прямоугольников 1×2, 2×3, 1×3. Ясно, что радиус круга, помещающегося в прямоугольник, не превосходит половины меньшей стороны. Тем самым искомый наибольший радиус равен $\frac{1}{2}$, а объём шара равен $\frac{\pi}{6}$.

б) Ясно, что это вписанный шар. Его радиус равен $\frac{1}{\sqrt{24}}$, объём равен $\frac{\pi}{36\sqrt{6}}$.

в) Большой круг этого шара должен помещаться в равносторонний треугольник с ребром 1 (из тех же соображений проектирования, что и в п. «а»). Заметим, что диаметр вписанной в треугольник окружности меньше 1 (равен $\frac{1}{\sqrt{3}}$). Поэтому шар такого диаметра поместится в призму. Его объём равен $\frac{\pi}{18\sqrt{3}}$.

г) Искомый шар будет вписанным. Его радиус (см. задачу **23.37**) равен $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$, а объём равен $\frac{\pi}{3(5\sqrt{2}+3\sqrt{6})}$.

д) Ясно, что это также будет вписанный шар. Его радиус равен $\frac{1}{2\sqrt{6}}$ (проще всего найти его, не думая, как отношение утроенного объёма к площади полной поверхности), а объём равен $\frac{\pi}{18\sqrt{24}}$.

е) Этот шар должен помещаться между плоскостями противоположных граней. Поэтому его диаметр не превосходит высоты параллелепипеда, которая равна $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Легко видеть, что шар такого диаметра помещается в параллелепипеде (он оказывается просто вписанным в этот параллелепипед). Объём шара равен $\frac{\pi\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$.

ж) Очевидно, что такой шар должен касаться не менее чем четырёх граней. В противном случае он либо вписан в трёхгранный угол и тогда его можно увеличить до касания ещё с одной гранью, либо зажат между двумя параллельными плоскостями оснований. Но этот случай невозможен, так как расстояние между плоскостями равно $\frac{1}{\sqrt{2}}$, а шар не может иметь диаметр, превосходящий диаметр описанной окружности треугольника основания (из соображений проектирования вдоль бокового ребра).

Значит, в силу невозможности касания двух оснований сразу шар касается всех граней, кроме одного основания. Из соображений симметричности призмы относительно плоскости, проходящей через среднюю линию квадратной грани и боковое ребро призмы, центр указанного шара лежит на этой плоскости.

Найдём двугранный угол при другом ребре основания. По теореме косинусов для трёхгранного угла находим плоский угол при вершине C $\left(\cos\angle C_1CB = \sqrt{\frac{5}{8}}\right)$, затем по теореме синусов для трёхгранного угла находим синус двугранного угла при ребре BC $\left(\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ и, пользуясь тем, что центр шара лежит на биссекторных плоскостях двугранных углов при рёбрах AC и BC, будем искать радиус шара.

Пусть r — искомый радиус шара, O_1 — точка касания шара с гранью ABC, O_2 — точка касания шара с гранью BB_1C_1C, M — середина AC. Тогда $|O_1M| = r\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}$, $|BO_1| = \frac{\sqrt{3}}{2} - r\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}$. Пусть H — основание перпендикуляра из O_1 на BC (эта же точка будет основанием перпендикуляра из O_2 на BC в силу того, что $OO_1O_2 \perp BC$). Тогда $|O_1H| = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - r\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}\right)$. С другой стороны, $|O_1H| = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = r\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Решив уравнение, найдём $r = \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{5}+\sqrt{2}-2)}$, после чего найдём и объём: $V = \frac{\pi\sqrt{3}}{2(\sqrt{5}+\sqrt{2}-2)^3}$.

з) Шар вписан в конус. Тогда его большой круг вписан в осевое сечение, значит, радиус шара равен $\frac{1}{2(1+\sqrt{2})}$ и объём этого шара будет равен $\frac{(5\sqrt{2}-7)\pi}{6}$.

и) В этот цилиндр можно вписать шар, причём радиус шара равен $\frac{1}{2}$, а объём равен $\frac{\pi}{6}$.

30.50. Наибольший шар содержит правильная пирамида (случай «а»). Для остальных пирамид будем рассматривать вместо них призму, их содержащую, основание которой есть прямоугольный треугольник с катетами 1 и 2, а высота равна 2. Для этой призмы наибольший из радиусов содержащихся в ней шаров равен радиусу вписанной в основание окружности, т. е. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, в то время как радиус шара, вписанного в правильную пирамиду, равен (по формуле задачи **23.37**) $\sqrt{2}-1$, что больше $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

30.51. Пусть рёбра двух тетраэдров с общей вершиной расположены на рёбрах одного трёхгранного угла с той же вершиной. Тогда их объёмы относятся как произведения указанных рёбер.

Для доказательства этого утверждения воспользуемся планиметрическим аналогом на одной из граней трёхгранного угла, заметив, что высоты на эту грань пропорциональны рёбрам (по теореме Фалеса).

30.52. Заметим, что проекцией тетраэдра на указанную плоскость будет обязательно треугольник (так как при проектировании две вершины данного ребра перейдут в одну точку на плоскости). Тем самым проекция тетраэдра на данную плоскость есть проекция одной из граней на указанную плоскость. Рассмотрим сначала случай, когда данное ребро и ему противоположное перпендикулярны. Тогда, проведя плоскость, перпендикулярную исходному ребру через ему противоположное, получим разбиение тетраэдра на два тетраэдра с общим основанием площади S и суммой высот d. Тем самым в указанном случае теорема доказана.

Сведём случай произвольного тетраэдра к уже разобранному (по образцу решения задачи **23.43**). Если начать двигать один конец ребра по прямой, параллельной противоположному ребру (оставляя другой на месте), расстояние до противоположной грани не изменится. Не изменится и проекция ребра на плоскость, перпендикулярную противоположному ребру, так как движение происходило в направлении проектирования. Двигать ребро будем до тех пор, пока оно не станет перпендикулярно своему противоположному. Из сказанного выше следует, что ни компоненты формул, ни объём тетраэдра не изменились.

30.53. Рассмотрим разбиение многогранника на пирамиды с вершинами в данной точке и основаниями — гранями многогранника.

Тогда $V = \frac{1}{3} \sum\limits_{i=1}^{n} h_i S$ (здесь S — площадь каждой грани, h_i — расстояние от точки до i-й грани, n — количество граней). Отсюда $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i = \frac{3V}{S}$ и не зависит от выбора точки. Аналогичное утверждение имеет место для многоугольников с равными сторонами.

30.54. Объём указанного параллелепипеда равен удвоенному объёму призмы. Действительно, если приложить к исходной призму, центрально-симметричную относительно центра грани AA_1C_1C, то получим данный в условии параллелепипед. Объём параллелепипеда равен произведению площади грани AA_1B_1B на длину высоты к этой грани, которая является расстоянием до грани от противоположного ребра. Объём призмы равен половине указанного произведения.

30.55. а) Да. По этим данным можно найти объём тетраэдра с данными вершиной и рёбрами. Объём такого тэтраэдра равен $\frac{1}{6}$ объёма параллелепипеда.

б) Рассмотрим куб с ребром 1. Его объём равен 1.

Рассмотрим теперь правильный тетраэдр с высотой, равной 1. Его объём равен $\frac{\sqrt{3}}{8}$. Правильный тэтраэдр достроим до параллелепипеда с измерениями, равными длинам его рёбер. Тогда объём параллелепипеда равен ушестерённому объёму тетраэдра, т. е. не равен 1. При этом все три его высоты равны 1.

Значит, по трём высотам найти объём параллелепипеда нельзя.

в) Нет. Рассмотрим куб с диагональю данной длины. Наряду с кубом рассмотрим ромб с углом при вершине, равным удвоенному углу между диагональю и ребром куба. Этот ромб можно считать вырожденным параллелепипедом с теми же диагональю и углами, что и у куба. Ясно, что, немного шевеля рёбра, можно получить и невырожденный случай.

г) Нет. Рассмотрим параллелепипед, рёбрами которого выступают диагонали трёх граней с общей вершиной исходного параллелепипеда. Если можно посчитать объём исходного, то можно посчитать объём и построенного параллелепипеда (см. задачу **30.16**). Но для построенного параллелепипеда мы имеем задачу из предыдущего пункта.

30.56. Данные об объёме пирамиды P_1ABC излишни. По стороне основания и плоскому углу при вершине можно найти объём правильной треугольной пирамиды. Тогда искомый объём равен разности объёмов двух правильных пирамид либо сумме этих объёмов (в зависимости от того, в одном или разных полупространствах относительно плоскости ABC находятся точки P_1 и P_2).

30.57. Да. Рассмотрим сначала сопровождающий параллелепипед для тетраэдра $ABCD$. Его объём равен площади грани, умноженной на высоту. Площадь грани равна полупроизведению длин скрещивающихся рёбер на синус угла между ними. Высота равна расстоянию между скрещивающимися рёбрами. Тогда объём тетраэдра равен $\frac{1}{6}abd\sin\varphi$ (здесь a, b — длины скрещивающихся рёбер, d — расстояние между ними, φ — угол между ними).

Заметим, что $KLMN$ — параллелограмм, смежные стороны которого соответственно параллельны рёбрам AB и CD и равны их половинам. Тогда площадь $KLMN$ в 4 раза меньше ab $\sin$ φ. Таким образом, площадь тетраэдра равна $\frac{2}{3}Sd$.

30.58. Да. Это точка пересечения медиатрис тетраэдра (см. п. «б» задачи **30.48**). Так как она делит каждую медиатрису в отношении 3 : 1, считая от вершины, то расстояние от неё до грани равно четверти соответствующей высоты. Тогда объём тетраэдра с вершиной в этой точке и основанием, совпадающим с гранью исходного тетраэдра, равен четверти объёма исходного тетраэдра.

В планиметрии тем же свойством обладает точка пересечения медиан. Это и неудивительно. Площади соответствующих треугольников численно равны массам, которыми нужно нагрузить вершины исходного треугольника, чтобы точка была центром масс. Но если массы равны, то центр масс есть точка пересечения медиан. Аналогичное свойство имеет место и в пространстве.

30.59. а) Из формулы, полученной в задаче **30.57**, следует, что объём не меняется и равен $\frac{1}{6}$.

б) Из той же формулы следует, что в этом случае объём меняется от 0 до $\frac{1}{6}$ (так как $\sin\varphi$ изменяется от 0 до 1).

30.60. Да. Найти объём можно, если вершины данных углов совпадают с вершиной пирамиды. Рассмотрим сечение, проходящее через апофемы равнобедренных граней. Оно будет перпендикулярно плоскости основания (так как перпендикулярно ребру основания). Тогда высота этого сечения на его след на основании есть высота пирамиды. Так как в указанном сечении нам известны все стороны (нижняя сторона равна стороне квадрата, а высоты равнобедренных треугольников находятся по основанию и углу при вершине), можно найти высоту, а затем и объём.

30.61. Прежде всего отметим, что многогранник, указанный в условии, до конца не определён (так как точки K, C, L, D необязательно лежат в одной плоскости, провести дополнительное ребро — либо KD, либо CL — можно двумя способами. То же можно сказать и о другой грани).

а) Если оба ребра проведены из вершины K (рис. 72, *а*), то указанный многогранник разбивается на треугольную пирамиду $KALD$ и четырёхугольную пирамиду $KABCD$. Если в задаче даны длины $|AB|$, $|AL|$, $|LD|$, то объёмы указанных пирамид легко найти (в первой высотой является сторона квадрата, а во второй — высота треугольника KBC).

б) В другом случае (если проведены рёбра BL и KD) объём по указанным данным также можно найти. Многогранник разбивается на три пирамиды: $ALBD$, $LBKD$, $KBCD$ (рис. 72, *б*). Объёмы первой и третьей равны и легко находятся (за основание принимаются половины квадрата). Объём второй считаем по формуле задачи **30.57**, проектируя ребро KL на плоскость основания и находя его и его угол с диагональю квадрата из планиметрических рассмотрений (на какие части концы его проекции делят стороны квадрата, можно найти).

30.62. Пусть объём конуса равен V, высота конуса равна H, а уровень воды находится на высоте h. Тогда объём воды равен $V - \left(\frac{H-h}{H}\right)^3 V$.

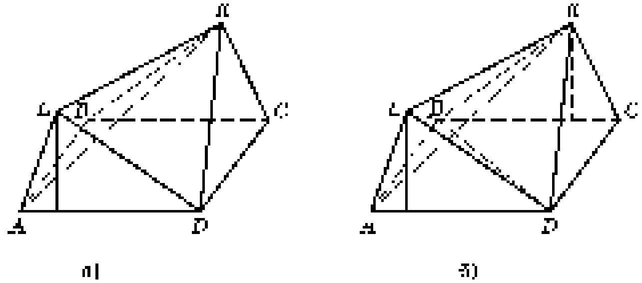

Рис. 72

После переворачивания объём вычисляется по формуле $\left(\frac{H-h}{H}\right)^3 V$. Приравнивая, получаем, что воды налито ровно половина.

Результат можно получить проще, заметив, что пустая в первом случае часть сосуда становится наполненной водой во втором. Это рассуждение показывает, что заключение о количестве воды не зависит от формы сосуда.

Для отношения $\frac{h}{H}$ имеем $\left(1-\frac{h}{H}\right)^3 = \frac{1}{2}$, откуда $\frac{h}{H} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. В этом же отношении делится меткой образующая конуса.

30.63. Да. Для этого можно измерить ведро, подсчитать, какой объём за данный промежуток времени заполнен водой, какую часть объём воды составляет от объёма ведра, и найти засечённое время.

30.64. Измерив все рёбра тетраэдра, найдём все плоские углы, а потом по теореме косинусов для трёхгранного угла найдём и двугранные углы. Высоту пирамиды находим как апофему боковой грани, умноженной на косинус двугранного угла. Площадь основания найдём по формуле Герона.

30.65. Пусть мыльный пузырь будет в форме сферы, а внутренний радиус пузыря равен r. Обозначим толщину пузыря через Δr. Тогда $V = \frac{4}{3}\pi\left((r+\Delta r)^3 - r^3\right)$. Это соотношение определяет Δr. Если пренебрегать степенями Δr, большими первой, получим $\Delta r = \frac{V}{4\pi r^2}$. Тогда при изменении радиуса в 2 раза толщина обратно изменяется в 4 раза.

30.66. Металлический шарик вытеснит объём воды, равный своему объёму. Опустив шарик в воду, выясняем по изменению уровня воды, каков объём шарика. После этого находим радиус.

30.67. Измеряем внутренний радиус и высоту колечка, затем вычисляем его объём как разность объёмов шарового пояса с данной высотой и радиусами оснований и цилиндра.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ VI

К задачам, особенно из раздела «Ищем границы», нужно подходить с максимальной осторожностью. Далеко не все построения и примеры могут быть обоснованы с разумной строгостью (см., например, задачи **VI.14**, **VI.15**, **VI.17**).

Как и в § 30, следует обращать внимание на геометрическую сторону в задачах, особенности приводимых конфигураций и т. д.

Многие из задач хороши для обсуждения на интуитивном или идейном уровне, без доведения до громоздкого ответа (например, задача **VI.12**). С другой стороны, задачи этого раздела можно использовать для повторения, а также различных самостоятельных работ. Например, задачи, решаемые с помощью производной, допускают тиражирование в большом числе вариантов (см. **VI.13**).

VI.1. Эта задача полностью решена в **30.57**.

VI.2. а) Проведём плоскость через указанные центры граней (обозначим их через O_1 и O_2), параллельную грани куба (рис. 73). Обозначим через M середину ребра CD, а через N середину AB. Точку пересечения O_1O_2 и MN обозначим через P. Получим

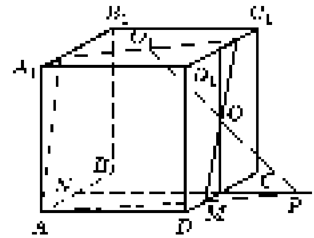

Рис. 73

$|NP| = \frac{3}{2}|MN|$. Тогда из подобия треугольников получаем, что плоскость делит ребро CD в отношении 2 : 1, считая от вершины C. Все остальные отношения находятся так же и равны 2 : 1.

б) Обозначим через K и L точки пересечения секущей плоскости с рёбрами A_1B_1 и CD соответственно. Тогда одна из частей куба представляется в виде объединения четырёхугольной пирамиды AA_1KLD и призматического клина. Положив ребро куба равным d, находим объём этой части (с учётом результатов предыдущего пункта) равным $\frac{d^3}{3}$.

Итак, плоскость делит объём куба в отношении 2 : 1.

Заметим, что данное сечение является параллелограммом (даже ромбом) со стороной $\frac{d\sqrt{10}}{3}$. Высоту находим как боковую в равнобедренном треугольнике KAL, где $|KL| = d\sqrt{2}$. В результате получаем площадь сечения равной $\frac{d^2\sqrt{11}}{3}$.

VI.3. Решение этой задачи абсолютно аналогично предыдущему.

VI.4. Обозначим данный параллелепипед через $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Будем искать расстояние между A_1B и AD_1. Эти диагонали являются противоположными рёбрами в тетраэдре AA_1BD_1. При этом объём указанного тетраэдра равен $\frac{1}{6}$ объёма параллелепипеда (нужно рассмотреть AA_1D_1 как основание), т. е. равен 1.

Произведение длин этих диагоналей на синус угла между ними есть удвоенная площадь треугольника ACD_1, которая равна $\frac{7}{2}$. Тем самым расстояние между указанными диагоналями не зависит от того, какие именно диагонали взяты, и равно $\frac{6}{7}$.

VI.5. Так как все грани тетраэдра — равные треугольники, то его сопровождающий параллелепипед прямоугольный.

Очевидно, что угол между прямыми AB и CD равен углу между прямыми AC и BD (из симметрии). Поэтому прямоугольники $AB'CD'$ и $DC'CD'$ равны, т. е. $AA'DD'$ — квадрат. Теперь рассмотрим два случая, решения которых с геометрической точки зрения практически одинаковы.

1) Высота пирамиды совпадает с высотой равнобедренного треугольника, опущенной на его основание. Опустим апофемы на ребро BC. Понятно, что они попадут в одну точку, являющуюся серединой отрезка BC. Пусть $BC = AD = 2a$. Тогда $DH^2 = AH^2 = x^2 - a^2$, где $x = DB = DC = AB = AC$.

Угол DHA прямой, поэтому $|AD^2| = |DH^2| + |HA^2|$, или $4a^2 = 2x^2 - 2a^2$, откуда $x = \sqrt{3}a$. Таким образом, расстояние между наибольшими рёбрами — это расстояние между рёбрами AD и BC. А расстояние между рёбрами AD и BC — это расстояние между плоскостями $AA'DD'$ и $BB'CC'$, т. е. равно длине отрезка $D'C$ (так как сопровождающий параллелепипед прямоугольный). Далее, $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{|DC|}{|AD|} = \frac{\sqrt{d^2 + |DD'|^2}}{\sqrt{2|DD'|^2}}$, следовательно, $|DD'|^2 = 2d^2$. Осталось только заметить, что объём тетраэдра равен трети объёма сопровождающего параллелепипеда. Итак, объём тетраэдра $V = \frac{2d^3}{3}$.

2) Высота пирамиды совпадает с высотой, опущенной на боковую сторону равнобедренного треугольника. Решение в этом случае практически дословно повторяет предыдущее с той разницей, что наибольшее расстояние будет между другими рёбрами. Ответ от этого не изменится.

VI.6. а) Объём правильного октаэдра равен двум объёмам правильной четырёхугольной пирамиды, у которой боковая грань равна стороне основания. Объём такой пирамиды (её высота равна полудиагонали основания) $\frac{\sqrt{2}}{6}$, поэтому объём правильного октаэдра с ребром 1 равен $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

б) Рассмотрим икосаэдр с единичным ребром. Тогда (см. решение задачи **26.1**) этот икосаэдр помещается в кубе с ребром $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ так, что каждые две его соседние вершины лежат на средней линии куба. Так как центры икосаэдра и куба совпадают, радиус описанной сферы равен боковой стороне равнобедренного треугольника, основание которого равно 1, а высота равна половине ребра куба $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$. Таким образом, радиус описанной сферы икосаэдра с единичным ребром равен $\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

Объём икосаэдра найдём через объём правильной пирамиды, основанием которой является грань икосаэдра, а вершиной — его центр. Объём одной такой пирамиды равен $\dfrac{3+\sqrt{5}}{48}$ $\left(\text{её высота равна } \dfrac{3+\sqrt{5}}{16\sqrt{3}}\right)$, а объём всего икосаэдра получается умножением на 20: $\dfrac{15+5\sqrt{5}}{12}$.

в) Воспользуемся двойственностью икосаэдра и додекаэдра. Для данного додекаэдра рассмотрим икосаэдр с вершинами в центрах граней. Тогда радиус описанной сферы этого икосаэдра равен радиусу вписанной сферы исходного додекаэдра. Поэтому, найдя ребро указанного икосаэдра, мы узнаем радиус вписанной сферы додекаэдра. Затем найдём объём через объём правильной пирамиды с вершиной в центре додекаэдра и основанием — гранью додекаэдра.

По теореме косинусов для трёхгранного угла с вершиной в вершине икосаэдра находим двугранный угол при его ребре (с учётом того, что $\sin 108^\circ = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$, $\cos 108^\circ = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$): $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. В равнобедренном треугольнике, боковые стороны которого равны радиусу окружности, вписанной в правильный пятиугольник с единичной стороной, а угол при вершине равен найденному двугранному углу, основание равно искомому ребру икосаэдра. Тогда для ребра икосаэдра имеем формулу $d = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{10\sqrt{5}}}$. Радиус вписанной в исходный додекаэдр сферы равен $r = \dfrac{3+\sqrt{5}\,\sqrt{1+\sqrt{5}}}{8\sqrt{5}}$, откуда объём додекаэдра равен $\dfrac{5(7+3\sqrt{5})\sqrt[4]{5}}{24}$.

VI.7. а) В пересечении получается правильная треугольная пирамида (рис. 74, *а*), основанием которой служит исходный треугольник. Апофему указанной пирамиды найдём как отрезок диагонали равнобедренной трапеции $PQMN$, у которой одно основание равно d, другое — $\dfrac{d}{2}$, а боковая сторона — $\dfrac{d\sqrt{5}}{2}$ (здесь d — длина стороны исходного треугольника). Тогда апофема равна $\dfrac{d\sqrt{7}}{6}$, а объём пирамиды — $\dfrac{d^3\sqrt{3}}{36}$.

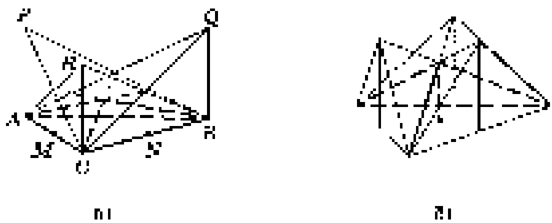

Рис. 74

Значит, искомое отношение равно $\frac{1}{3}$ и равно отношению высот пирамид.

Найденное значение подсказывает и другой метод решения. Именно: высоту можно найти из подобия треугольников, так как вершина является пересечением перпендикуляра к основанию, восставленного из центра, и стороны QM. Получим, что высота пирамиды-пересечения равна трети высоты исходной пирамиды.

б) В пересечении получается также правильная пирамида (рис. 74, *б*). Её высота находится как $\frac{2}{3}d$ (так как вершина является пересечением перпендикуляра, восстановленного из центра треугольника, с ребром каждой из указанных пирамид). Поэтому объём равен $\frac{d^3\sqrt{3}}{18}$. Здесь d является также длиной стороны исходного треугольника. Искомое отношение объёмов равно $\frac{2}{3}$.

VI.8. Объём этого многогранника можно сложить из двух объёмов четырёхугольных пирамид, составляющих этот многогранник ($AKLMC$, $AKMLB$). Вычислим объём $AKLMC$:

$$V_1 = \frac{1}{3}S_{KMLA} \cdot |CH|.$$

Высота CH является одновременно высотой треугольника ACL и пирамиды $AKMLC$, так как плоскость треугольника перпендикулярна плоскости AKM. $S_{KLMA} = \frac{1}{2}a(d_1 + d_2)$, где $a = |AL|$. Кроме того, $S_{\Delta ACL} = \frac{1}{2}a \cdot CH$. Тогда $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a(d_1 + d_2)|CH|$.

Аналогично считается объём второй пирамиды.

Сложим два объёма:

$$V = V_1 + V_2 = S_{\Delta ACL}(d_1 + d_2)\frac{1}{3} + S_{\Delta BAL}(d_1 + d_2)\frac{1}{3} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}(d_1 + d_2).$$

Заметим, что при получении ответа мы не пользовались тем, что L — середина CB, а значит, задача верна для любой точки стороны треугольника BC (даже прямой, содержащей BC).

VI.9. Можно получить требуемое тело несколькими «действиями» (рассмотреть две пирамиды, их пересечение, пересечение этого пересечения и следующей пирамиды и т. д. Это и будем называть «действием»).

В пересечении получится новый куб, на каждой грани которого построена правильная пирамида (рис. 75).

Теперь нужно найти объём полученной фигуры. Сначала найдём по отдельности объём куба и объём шести пирамидок, затем сложим их. Все шесть пирамидок равны в силу симметрии. Таким образом, достаточно найти длину ребра куба и высоту пирамидки, так как её основание есть грань куба.

Спроектируем конфигурацию на грань исходного куба, обозначив длину его ребра через a. После несложных планиметрических вычислений получим:

$$V_{\text{куба}} = |SK|^3 = \frac{a^3}{27},\ V_{\text{пирамид}} = 2 \cdot \frac{a}{12} \cdot \frac{a^2}{9} = \frac{a^3}{54}.$$

Тогда объём всего тела равен $\frac{1}{18}a^3$ и искомое отношение равно $\frac{1}{18}$.

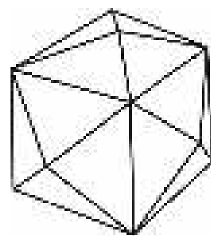

Рис. 75

VI.11. Пусть ребро правильного тетраэдра равно a. Нетрудно подсчитать, что расстояние между противоположными рёбрами тетраэдра равно $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Также отметим, что если на двух прямых лежат противоположные рёбра правильного тетраэдра, то эти прямые перпендикулярны.

Теперь найдём расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней призмы (например, AC_1 и CB_1). Для этого заметим, что объём тетраэдра ACC_1B_1 составляет $\frac{1}{3}$ объёма призмы, так как тетраэдр получается выкидыванием из призмы тетраэдров $AA_1B_1C_1$ и B_1ABC, у которых такие же высота и основание, как и у призмы (рис. 76). Тогда указанное расстояние равно удвоенному объёму призмы, делённому на квадрат диагонали боковой грани (это есть прямое следствие формулы задачи **30.57**).

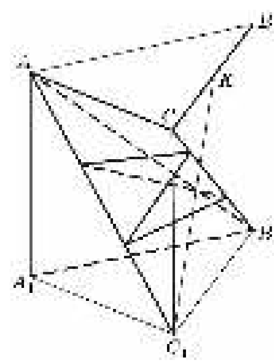

Рис. 76

Подсчитаем объём призмы, положив ребро основания равным b, а боковое ребро равным c. Тогда прежде всего отметим, что по теореме о трёх перпендикулярах $C_1K \perp CB_1$, где K — середина BC (здесь мы воспользовались перпендикулярностью скрещивающихся диагоналей граней призмы, так как C_1K есть проекция AC_1 на плоскость CC_1B_1). Тогда, так как C_1K делит CB_1 в отношении 2 : 1, считая от B_1, получаем $\frac{1}{9}(b^2 + c^2) = \frac{2}{9}\left(c^2 + \frac{b^2}{4}\right)$, откуда $c = \frac{b}{\sqrt{2}}$, а объём призмы равен $\frac{b^3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$. Искомое расстояние получаем равным $\frac{b}{\sqrt{6}}$. Тогда имеем $a = \frac{b}{\sqrt{3}}$. Объём правильного тетраэдра с известным ребром равен $\frac{b^3\sqrt{2}}{36\sqrt{3}}$. Искомое отношение объёмов равно $\frac{27}{4}$.

VI.12. Общая часть этих шаров есть объединение двух шаровых сегментов. Пусть h_1 — высота первого из них, h_2 — высота второго (нумерация высот соответствует нумерации радиусов шаров, к которым относятся сегменты).

Тогда, использовав равенства $R_1^2 - (R_1 - h_1)^2 = R_2^2 - (R_2 - h_2)^2$ и $h_1 + h_2 = R_1 + R_2 - d$ (первое из них является равенством радиусов общей окружности шаровых сегментов), получаем:

$$h_1 = \frac{(3R_2 + R_1 - d)(R_1 + R_2 - d)}{4R_1 + 4R_2 - 2d}, \quad h_2 = \frac{(3R_1 + R_2 - d)(R_1 + R_2 - d)}{4R_1 + 4R_2 - 2d}.$$

Подставив найденные значения в формулы объёма сегментов, получим ответ.

VI.13. Фактически это задача о том, как вписать в данный пятиугольник прямоугольник наибольшей площади. Она решается с помощью производной.

VI.14. а) Это правильный тетраэдр, для которого сопровождающим параллелепипедом является данный куб. Наметим здесь план возможного доказательства.

Ясно, что все вершины должны лежать на рёбрах куба (иначе объём тетраэдра можно увеличить). Тогда в кубе остаются, как минимум, четыре прямоугольных тетраэдра. Если записать их объёмы через части рёбер, то суммарный их объём будет наименьшим как раз в указанном случае.

б) Это пирамида с вершиной в центре грани и противоположной гранью в качестве нижнего основания. То, что пирамиды большего объёма нет, доказывается рассмотрением случаев различного расположения пирамиды (ясно, что оно должно быть симметричным относительно вращений куба, иначе объём может быть увеличен).

в) Это будет пирамида с вершиной в вершине куба и основанием, равным дальнему из двух сечений, являющихся правильными шестиугольниками и перпендикулярных диагонали, выходящей из данной вершины. Действительно, то, что этот объём наибольший среди всех пирамид, опирающихся на шестиугольные сечения, перпендикулярные диагонали, доказывается прямым дифференцированием. Для остальных пирамид объём может быть увеличен.

VI.15. Эта задача решается также с помощью производной. Окружность цилиндра оказывается вписанной в сечение куба плоскостью, перпендикулярной диагонали. Если это сечение имеет треугольную форму и его плоскость отстоит от вершины на расстояние x, то сторона треугольника равна $x\sqrt{6}$, а радиус окружности основания равен $\frac{x}{\sqrt{2}}$. Высота цилиндра равна $a\sqrt{3}-2x$. Тогда объём цилиндра равен $V=\frac{\pi x^2}{2}(a\sqrt{3}-2x)$. При этом x меняется от 0 до $\frac{a}{\sqrt{3}}$ (поскольку самое большое треугольное сечение куба, перпендикулярное его диагонали, отсекает треть диагонали). Получаем, что максимальный объём будет при $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$. Ясно, что это будет и наибольшим значением в целом, так как окружность не может стать большего радиуса, а высота будет уменьшаться.

VI.16. а) Ясно, что этот параллелепипед есть половина от параллелепипеда наибольшего объёма, находящегося в шаре (так как к полушару всегда можно приставить такой же полушар с параллелепипедом), т. е. куба. Отношение объёмов такое же (см. решение задачи **30.48**).

б) Аналогичное рассуждение сводит эту задачу к п. «г» задачи **30.48**.

в) Правильная четырёхугольная пирамида имеет наибольший объём, если её основание вписано в основание полушара, а высота равна высоте полушара (кстати, такая пирамида является половиной правильного октаэдра). Тогда её объём равен $\frac{2}{3}R^3$ (R — радиус полушара), а отношение объёмов равно $\frac{1}{\pi}$.

г) Рассуждение, аналогичное рассуждению из п. «а», сводит задачу к п. «д» задачи **30.48** с тем же ответом.

д) Наибольший объём будет, очевидно, у конуса, основание которого равно основанию полушара, а высота — радиусу полушара. Искомое отношение равно 1 : 2.

VI.17. а), б), г) Ясно, что прямой цилиндр будет иметь наибольший объём, если его основание находится на основании конуса. Далее задача решается стандартным образом с помощью производной.

в) Эта пирамида имеет наибольший объём, если её основание вписано в основание конуса и вершина находится в вершине этого конуса. Отношение объёмов пирамиды и конуса равно отношению площадей оснований, т. е. $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. Поэтому объём пирамиды наибольший, если наибольший объём конуса. Составив функцию, выражающую объём в зависимости от высоты, получим, что наибольший объём конуса при $h = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Объём пирамиды при этом равен $\frac{1}{6}$.

д) Радиус вписанного в этот конус шара наибольший, если осевое сечение — равносторонний треугольник. Тогда объём этого шара равен $\frac{\pi}{18\sqrt{3}}$.

е) Вопрос рассмотрен в п. «в». О т в е т: $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

ж) Приставим к конусу такой же конус так, чтобы у них было общее основание. Требуется найти, когда в ромб со стороной 1 (осевое сечение получившегося тела) будет вписан круг наибольшего радиуса. Ясно, что это произойдёт, если указанный ромб — квадрат (так как диаметр круга равен высоте ромба). Тогда наибольший объём шара равен $\frac{\pi}{8}$.

VI.18. а) Сделаем фиксированным радиус фигуры (т. е. радиус основания конуса или цилиндра). Тогда:

1) очевидно, что фигура касается сферы, причём основание цилиндра (не общее с конусом) совпадает с сечением сферы плоскостью, содержащей это основание. Иначе можно увеличить высоту цилиндра или конуса и тем самым увеличить объём;

2) часть конуса всегда меньше части цилиндра при одинаковых высотах;

3) наша фигура состоит из цилиндра, вписанного в шар так, что его основания являются сечениями шара. Конус своей вершиной касается шара. Иначе можно построить фигуру большего объёма.

Найдём радиус, при котором фигура, описанная в п. 3 наших рассуждений, имеет наибольший объём. Для этого напишем формулу для её объёма.

Пусть $2h$ — высота цилиндра. Тогда

$$V = \pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h^2 = \frac{\pi}{3}(R^2 - h^2)(5h + R).$$

Дифференцируя по h, получаем, что наибольшим будет объём при

$$h = \frac{-R + \sqrt{76}\,R}{15} = R\,\frac{-1 + \sqrt{76}}{15}.$$

Вычислив указанный объём, получим $\frac{8}{2025}\pi(37+\sqrt{19})(1+\sqrt{19})$.

б) Повернём чертёж так, чтобы плоскость основания была горизонтальной.

Если основание конусов не является сечением шара, то за счёт увеличения радиуса конусов можно добиться увеличения объёма. Будем считать, что основанием конусов является сечение шара.

Пусть высота одного из конусов h, тогда высота другого $2R - h$. За счет увеличения высоты одного из конусов можно добиться увеличения объёма этого конуса, а следовательно, и всей фигуры. Заметим также, что ось фигуры совпадает с одним из диаметров, так как иначе при помощи параллельного переноса и увеличения высоты одного из конусов можно добиться увеличения объёма.

Радиус фигуры вычисляется по формуле:

$$r=\sqrt{R^2-(R-h)^2}=\sqrt{(R-R+h)(R+R-h)}=\sqrt{h(2R-h)}.$$

Отсюда для объёма имеем $V=V_1+V_2=\frac{2}{3}\pi h(2R-h)R$.

Максимум выражения $2hR - h^2$ находится при $h = R$, а следовательно, здесь же и максимум $V(h)$. В нашем случае $V=\frac{2}{3}\pi$.

VI.19. а) Ясно, что объём этих шаров будет наибольшим, если каждый из них касается трёх граней тетраэдра и ещё одного шара. Радиус шара в такой конфигурации вычислен в задаче **V.15**: $r=\frac{1}{2+2\sqrt{6}}$, откуда находим суммарный объём шаров: $V=\frac{2\pi}{3(1+\sqrt{6})^2}$.

б) Нет. Это связано с тем, что наибольший возможный радиус такого шара, найденный так же, как и в задаче **V.15**, равен $\frac{\sqrt{2}}{20\sqrt{3}}$ (такой радиус получится, если один из шаров будет с центром в центре тетраэдра, а остальные касаться его и трёх граней тетраэдра).

VI.20. а) Да. В цилиндр можно вписать шар, если его осевое сечение — квадрат. Тогда легко найти высоту и радиус основания цилиндра (диаметр и радиус вписанного шара).

б) Да. Фактически это радиусы вписанного и описанного кругов для равнобедренного треугольника в осевом сечении. По данным радиусам находим расстояние между центрами (по формуле Эйлера $d^2 = R^2 - 2Rr$), затем высоту треугольника (как $h = R + r - d$ либо $h = R + r + d$), а потом угол при основании из уравнения $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha=\frac{r}{R}$.

Заметим, что ответов будет два. Углы при осевом сечении этих конусов в сумме дают 180°.

в) Да. Радиусы вписанной и описанной окружностей полностью определяют равнобокую трапецию (осевое сечение усечённого конуса).

г) Если в прямоугольный параллелепипед можно вписать сферу, то он куб. Ясно, что тогда данных более чем нужно.

д) Да. Высота призмы равна диаметру вписанной сферы, а сторону основания находим из того, что радиус вписанной окружности равен радиусу вписанной сферы. Так что и в этом случае радиус описанной сферы не понадобился.

е) Да. При данном чётном n составляются два уравнения, связывающие сторону основания и апофему боковой грани. Первое — из условия, что осевое сечение, проходящее через боковые рёбра, вписано в окружность известного радиуса, второе — из условия, что осевое сечение, проведённое через середины рёбер основания, описано вокруг окружности известного радиуса. Из указанных уравнений находятся стороны, а значит, объём.

При нечётном n (как и при чётном) можем воспользоваться для получения уравнений формулами задачи **23.37**.

VI.22. Заметим, что шар можно поместить в тело тогда и только тогда, когда наибольший объём шара, помещаемого в тело, составляет более половины объёма тела.

а) Да. Объём шара, вписанного в куб, составляет $\frac{\pi}{6} > \frac{1}{2}$ объёма куба.

б) Не всегда. Если параллелепипед длинный и узкий, то шар не поместится.

в) Нельзя. Даже если в призму можно вписать шар, то её высота равна диаметру шара, радиус вписанной окружности основания равен радиусу шара, поэтому её объём равен $6\sqrt{3}\,r^3$. Но отношение объёма призмы к объёму вписанного шара будет больше 2.

г) Нет. Отношение объёма вписанного шара к объёму правильного тетраэдра равно $\frac{\pi}{6\sqrt{3}} < \frac{1}{2}$.

д) Нет. Возьмём пирамиду со стороной основания $2a$ и апофемой b. Тогда её объём равен $\frac{4}{3}a^2\sqrt{b^2 - a^2}$. Радиус вписанного шара находим из осевого сечения: $r = \frac{a\sqrt{b^2 - a^2}}{a + b}$. Отношение объёма пирамиды к объёму вписанного шара равно $\frac{(1 + t)^2}{\pi(t - 1)}$, где $t = \frac{b}{a}$. Дифференцируя это выражение по t, находим, что наименьшее значение этого выражения равно $\frac{8}{\pi} > 2$ при $t = 3$.

е) Иногда. Если в цилиндр можно вписать шар, то, как показал ещё Архимед, отношение объёма вписанного шара к объёму цилиндра равно $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$. Однако если цилиндр длинный и узкий, то шар фиксированного радиуса в него не поместится.

ж) Почти никогда. Аналогично рассуждениям в п. «д» получаем, что отношение объёмов конуса и вписанного шара равно $\frac{(1+t)^2}{4(t-1)}$, где t — отношение образующей к радиусу основания. Минимум этого выражения достигается при $t = 3$ и равен 2. Только в этом случае шар поместится в конус вдвое большего объёма.

Из этого пункта следуют результаты пп. «г» и «д», так как ясно, что если в конус нельзя поместить шар, то в пирамиду, которая при том же радиусе вписанного шара имеет больший объём, шар нельзя поместить тем более.

з) Иногда можно. Ясно, что, слегка пошевелив цилиндр (сжав его верхнее основание), получим усечённый конус, в который шар ещё будет помещаться. В то же время, взяв просто конус, в который шар не помещается, и срезав малую часть от вершины, получим усечённый конус, в который шар не помещается.

VI.23. Нальём полный сосуд воды и отольём её так, чтобы кромка воды отмечала равносторонний треугольник из смежных граней. Это значит, что отлита шестая часть воды. Её отольём в другой сосуд. Повторив процедуру 4 раза, отмеряем нужное количество воды.

VI.24. Нужно сделать наименьшим объём стенок. $V_1 = \pi H((r + h)^2 - r^2) + \pi(r + h)^2 h$. При этом внутренняя часть корыта имеет известный объём $V = \pi r^2 H$ (r — радиус внутренней части корыта, H — длина внутренней части корыта), откуда, выразив H через r, получим V_1 как функцию от r. Взяв производную, получим, что объём будет наименьшим при $r^3 = \frac{V}{\pi}$, тогда $H = r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

§ 32. Площадь поверхности

Пункт 32.1 следует рассматривать как общее введение — знакомство с проблематикой темы. Более того, дополнение к § 32 ещё более проясняет требования, предъявляемые в этом пункте. Однако дальнейшее изложение темы ведётся для площади выпуклой поверхности. В п. 32.2 для неё даётся особое определение. Появление при этом описанного многогранника вполне оправдано разговором о проектировании (кусков поверхности) на опорные плоскости выпуклой поверхности (в п. 32.1). Лемма 32.1 может быть дана как предварительная задача ученикам. В п. 32.3 важно подчеркнуть, что поверхности многогранников будут не просто приближаться к данной сфере, а становиться сколь угодно близкими к ней. Этот пункт аналогичен пункту учебника этих же авторов для 8—9 классов математических школ, где излагается вопрос о длине окружности через периметры описанных многоугольников. Пункт 32.4 позволяет провести аналогию с измерением длины дуги окружности и даёт важный для физики материал.

При подготовке третьего и последующих изданий учебника существенно изменился пункт «Площади поверхностей усечённого конуса, конуса и цилиндра». Изменение было необходимо. Фраза «Конус и цилиндр можно рассматривать как предельные случаи усечённого конуса», с которой начинался пункт, служивший основанием для применения формулы площади боковой поверхности усечённого конуса для конуса и цилиндра, звучала неубедительно. Но с другой стороны, теперь авторы фактически вернулись к доказательству, напоминающему доказательство, приведённое в «Геометрии» А. П. Киселёва, которое упрекалось в отсутствии объяснения использования свойства аддитивности площади поверхности (пускай даже и имевшего место для выпуклых поверхностей).

Представляется возможным некий «серединный» план:

1. вывести формулу для усечённого конуса;
2. предложить ученикам провести аналогичные рассуждения для конуса и цилиндра;
3. сравнить полученные формулы и дать им геометрическое толкование (а можно и заранее из геометрических соображений предсказать результат, а потом доказать его.)

Задачи к § 32

Следует обратить внимание на то, что в данном параграфе очень много задач, похожих методом решения или вовсе одинаковых по сути (см., например, **32.17** и **32.65**, **32.72** и **32.52**, **32.35** и **32.42** и др.). Поэтому не следует решать их все. Здесь, как и всюду в учебнике, учителю дана большая свобода в выборе задач. Можно ограничиться задачами технико-вычислительного плана (**32.6**—**32.11**), добавив к ним задачи на применение производной (**32.35**, **32.37**, **32.42**). Однако считаем весьма полезным рассмотреть те задачи из раздела «Ищем границы», ответы которых получаются из чисто геометрических соображений. В отличие от § 30 и задач к главе VI таких задач здесь весьма много.

Обращаем внимание на утверждение, доказанное в решении задачи **32.49** и применённое затем при решении задачи **32.53**. Отметим, что задача **32.49** — одна из немногих задач параграфа, которая не сводится к манипуляциям с линейными размерами тел.

В данном параграфе присутствуют задачи, изобилующие «физическими» соображениями (например, задачи **32.73, 32.74** и др.).

Наконец, отметим, что задачи **32.75** и **32.76** следует решать вместе. При этом полное решение задачи **32.76** (с нахождением наименьшего возможного числа спутников) весьма сложное и здесь не приводится.

32.5. Формула площади сферического сегмента может быть выведена на основании теоремы 32.2 учебника. Формула площади сферического пояса получается вычитанием из площади сферы площадей двух сферических сегментов.

32.6. Измеряя две диагонали ромба, вычислим его площадь. Измеряя все рёбра пирамиды, сможем вычислить площади боковых граней (так как высота падает в центр ромба, получаем, что противоположные боковые рёбра равны).

32.7. Этот многогранник является треугольной пирамидой. У неё две грани — равные равнобедренные треугольники с общим основанием, плоскости которых взаимно перпендикулярны. Тогда ребро, соединяющее вершины этих треугольников, перейдёт при проектировании в равный по длине отрезок. Измерив высоты и основания равнобедренных треугольников на проекциях, а также гипотенузу третьего треугольника, узнаём все площади граней (сначала узнаём рёбра, а затем вычисляем площади по формуле Герона).

32.8. Рассмотрим центр шара. Расстояния от центра до плоскостей, ограничивающих пояс, находим по теореме Пифагора: $h_1 = \sqrt{R^2 - R_1^2}$, $h_2 = \sqrt{R^2 - R_2^2}$. Тогда в зависимости от того, будет центр содержаться внутри шарового пояса или вне его, получим высоту шарового пояса либо $h_1 + h_2$, либо $|h_1 - h_2|$. Далее см. формулу задачи **32.5**.

Объём шарового пояса по данным радиусам оснований и радиусу шара был найден в задаче **30.3**.

32.9. Измерив длины трёх хорд основания, образующих треугольник, найдём радиус окружности основания сегмента (двух окружностей оснований пояса). Если сегмент однородный, положим его на стол сферической частью. Точка, где он соприкоснётся со столом в равновесии, есть вершина сегмента. Затем можно измерить высоту сегмента (правда, это измерение длины кривой, не лежащей на поверхности) и найти радиус исходной сферы, после чего применить соответствующие формулы.

Что касается пояса, то, найдя радиусы оснований и измерив высоту, находим площадь и объём по формулам.

32.10. Если один из цилиндров повернуть в пространстве так, чтобы поверхность их пересечения повернулась на 180° в своей плоскости, то получится один большой цилиндр. Радиус его основания равен радиусу основания исходного цилиндра, а образующая равна сумме образующей исходного цилиндра и самой короткой части образующей другого цилиндра. Измерив эти величины, находим площадь поверхности тела.

32.11. Тело представляет собой конус, поставленный на усечённый конус. Измерив радиусы оснований и образующие на проекциях, найдём по формулам площадь поверхности фигуры.

32.12. Пусть ребро исходного куба равно 1. Тогда поверхность каждого кубика имеет площадь $\frac{6}{n^2}$. Суммарная площадь поверхности кубиков равна $6n$. Отсюда о т в е т: в n раз больше.

32.13. Так как ребро проектируется в отрезок биссектрисы угла основания, оно равнонаклонено к боковым рёбрам. Заметим, что тогда все площади боковых граней равны, так как у параллелограммов-граней равны углы между соответственно равными рёбрами.

Рассмотрим прямоугольный тетраэдр, вершина которого — центр нижнего основания, а рёбра — отрезки диагоналей квадрата и высота из вершины верхнего основания в центр нижнего. Длины боковых рёбер этого тетраэдра равны $\frac{d_1}{\sqrt{2}}$, $\frac{d_1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{d_2^2 - \frac{d_1^2}{2}}$. Вычисляем площадь оставшейся грани этого тетраэдра: $S_г = \sqrt{\frac{d_1^4}{16} + \frac{d_1^2\left(d_2^2 - \frac{d_1^2}{2}\right)}{4}}$. Заметим, что указанная площадь есть половина площади боковой грани. Теперь можно найти площадь полной поверхности параллелепипеда: $S = 2d_1^2 + 8 =$

$$= \sqrt{\frac{d_1^4}{16} + \frac{d_1^2\left(d_2^2 - \frac{d_1^2}{2}\right)}{4}}.$$

32.15. Возможны два случая с разными ответами:

1) $|AB| = |AC| = 10$, $|BC| = 12$. Тогда площади боковых граней, смежных с ребром AA_1, равны и легко находятся (высота из вершины A_1 равна 12 как высота равнобедренного треугольника со сторонами 13, 13, 10). Именно: площади указанных граней равны 120. Так как грани, примыкающие к ребру AA_1, равны, указанное ребро равнонаклонено к AB и AC, в таком случае AA_1 проектируется в биссектрису треугольника CAB, а значит, по теореме о трёх перпендикулярах $AA_1 \perp BC$. Поэтому BB_1C_1C — прямоугольник. Окончательно получаем: $S = 492$.

2) $|AB| = |BC| = 10$, $|AC| = 12$. Для нахождения площади боковой поверхности воспользуемся результатом задачи **32.3**. Для нахождения периметра перпендикулярного сечения найдём объём призмы и поделим его на длину бокового ребра. Получим площадь перпендикулярного сечения. Затем, зная высоты боковых граней (т. е. две стороны перпендикулярного сечения), найдём третью его сторону.

Высота призмы равна высоте пирамиды A_1ABC. Так как у этой пирамиды боковые рёбра равны, высота её падает в центр описанной окружности основания. Радиус описанной окружности равен $\frac{abc}{4S} = \frac{25}{4}$, откуда $h = \sqrt{13^2 - \left(\frac{25}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{231}}{4}$. Тогда $S_{\text{перп.}} = \frac{36\sqrt{231}}{13}$.

Теперь найдём площади параллелограммов AA_1B_1B и AA_1C_1C как удвоенные площади соответствующих равнобедренных треугольников AA_1B и AA_1C. Они равны соответственно 120 и $12\sqrt{133}$. Тогда стороны перпендикулярного сечения равны высотам в указанных параллелограммах, проведённым к ребру AA_1, т. е. равны $\frac{120}{13}$ и $\frac{12\sqrt{133}}{13}$. Найдём теперь синус угла между указанными сторонами, поделив удвоенную площадь перпендикулярного сечения на произведение длин этих сторон: $\sin\alpha = \frac{13\sqrt{231}}{20\sqrt{133}}$. Отсюда $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2023}{7600}}$ (очевидно, что указанный угол острый), и третья сторона перпендикулярного сечения по теореме косинусов равна $\frac{\sqrt{33\,552 - 144\sqrt{14\,161}}}{13}$.

Теперь получаем площадь полной поверхности как

$$216 + 12\sqrt{133} + \sqrt{33\,552 - 144\sqrt{14\,161}}.$$

32.16. Так как $PX \perp AX$, то и $BX \perp AX$ по теореме о трёх перпендикулярах. Тогда точка X — середина BC, и у частей пирамиды будет общая грань PAX, $S_{BAX} = S_{ACX}$, $S_{BPX} = S_{PXC}$. Поэтому если говорить об отношении площадей боковых поверхностей указанных пирамид, то эти площади равны. Отношение полных площадей установлено быть не может, так как зависит от отношения площадей PAB и PAC, которое при данных этой задачи может быть разным.

32.17. Заметим, что верхний тетраэдр подобен исходному. Тогда площадь поверхности верхнего тетраэдра относится к площади поверхности исходного тетраэдра как квадрат коэффициента подобия, откуда коэффициент подобия равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$. В другом случае коэффициент подобия равен $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Коэффициент подобия показывает, какую часть высоты (считая от вершины) отсекает данная плоскость. Таким образом, плоскость, делящая пополам объём, отстоит дальше от вершины, т. е. расположена ближе к грани.

32.18. В этой задаче недостаточно данных. Ясно, что, приближая вершину B к плоскости APC и сохраняя при этом длины данных рёбер и объём, мы уменьшаем высоту и тем самым неограниченно увеличиваем площадь грани PAC. Таким образом, площадь поверхности тетраэдра может быть сделана сколь угодно большой.

32.19. Заметим, что косинус двугранного угла α между боковой гранью и основанием равен $\frac{1}{n}$, так как площадь проекции боковой грани на основание составляет $\frac{1}{n}$ площади основания и равна площади исходной грани, умноженной на косинус упомянутого угла.

Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{n^2 - 1}$, а радиус вписанной окружности основания равен $\frac{H}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{H}{\sqrt{n^2 - 1}}$. По известному радиусу вписанной окружности находим площадь основания $S_{\text{осн}} = \frac{n\, h^2 \operatorname{tg}\frac{180°}{n}}{n^2 - 1}$. Теперь легко найти объём пирамиды $\left(V = \frac{nH^3 \operatorname{tg}\frac{180°}{n}}{3(n^2 - 1)}\right)$ и площадь её полной поверхности $\left(S = \frac{nH^3 \operatorname{tg}\frac{180°}{n}}{n - 1}\right)$.

32.20. а) Каждая боковая грань пирамиды — равнобокая трапеция. По основаниям и боковой стороне легко находим площадь этой трапеции, а затем умножаем её на n: $S = n\frac{d_1 + d_2}{2}\sqrt{d_3^2 - \left(\frac{d_1 - d_2}{2}\right)^2}$.

б) Вычисляем боковое ребро как разность радиусов окружностей, описанных около оснований, делённую на $\cos\varphi$: $d_3 = \frac{|d_1 - d_2|}{2\sin\frac{180°}{n}\cos\varphi}$, а затем пользуемся результатом предыдущей задачи. Окончательно имеем $S = \frac{n\left|d_1^2 - d_2^2\right|\sqrt{1 - \sin^2\frac{180°}{n}\cos^2\varphi}}{4\sin\frac{180°}{n}\cos^2\varphi}$.

в) Так как высота трапеции равна разности радиусов, вписанных в основания окружностей, делённой на $\cos\varphi$, то искомая площадь равна $S = \frac{n\left|d_1^2 - d_2^2\right|}{4\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$.

г) Высота трапеции равна $\sqrt{h^2 - \left(\dfrac{d_1 - d_2}{2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{180°}{n}}\right)^2}$, а искомая площадь равна $S = n\,\dfrac{|d_1 + d_2|}{2}\sqrt{h^2 - \left(\dfrac{d_1 - d_2}{2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{180°}{n}}\right)^2}$.

32.21. В этом задании собраны многочисленные ситуации, когда удобным оказывается искать радиус вписанного шара как отношение утроенного объёма к площади полной поверхности.

а) Для этого воспользуемся формулой $r = \dfrac{3V}{S}$ и получим

$$r = \frac{\dfrac{d^3}{2\sqrt{2}}}{d^2\sqrt{3}} = \frac{d}{2\sqrt{6}}.$$

б) $r = \dfrac{d^3\sqrt{2}}{2d^2\sqrt{3}} = \dfrac{d}{\sqrt{6}}$.

в) Пусть ребро основания пирамиды равно a, а боковое ребро — b. Тогда высота пирамиды равна $\sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}\right)^2}$. Используя формулу $r = \dfrac{3V}{S}$, получаем $r = \dfrac{a\sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}\right)^2}}{a + 2\mathrm{tg}\,\dfrac{180^\circ}{n}\sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4}}}$.

г) Так как вписать сферу можно только в правильную призму, у которой боковое ребро равно диаметру окружности, вписанной в основание, то радиус вписанной сферы равен половине бокового ребра.

д) Вновь воспользуемся формулой $r = \dfrac{3V}{S}$. Имеем $V = \dfrac{d_1^2\, d_2\sqrt{3}}{12}$. Площади граней, примыкающих к высоте пирамиды, равны $\dfrac{d_1 d_2}{2}$, площадь оставшейся боковой грани вычислим, найдя её высоту:

$h=\sqrt{d_2^2+\dfrac{3d_1^2}{4}}$, $S_{\text{гр}}=\dfrac{d_1\sqrt{d_2^2+\dfrac{3d_1^2}{4}}}{2}$. Теперь найдём радиус: $r=\dfrac{d_1d_2}{d_1\sqrt{3}+4d_2+\sqrt{4d_2^2+3d_1^2}}$.

Остальные пункты этого задания столь же просты. Приведём здесь лишь о т в е т ы к ним:

е) $r=\dfrac{hd\sin\varphi}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}+\dfrac{1}{2}\sin\varphi\cdot\sqrt{h^2+d^2\cos^2\varphi\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}$.

ж) 1) $r=\dfrac{hd}{h+d+\sqrt{h^2+d^2}}$; 2) $r=\dfrac{2hd}{2d+h+\sqrt{h^2+d^2}+\sqrt{4h^2+d^2}}$.

з) Следует отметить, что в указанном задании в данный параллелепипед не всегда можно вписать сферу. В том случае, когда это можно сделать, диаметр сферы равен высоте параллелепипеда, тогда $r=\dfrac{d\sqrt{\cos\varphi-\cos2\varphi}}{2\sqrt{2}\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}$.

и) В том случае, когда это можно сделать, высота пирамиды равна диаметру сферы. Тогда $r=\dfrac{1}{2}\sqrt{c^2-\left(\dfrac{a-b}{2\sin\dfrac{180°}{n}}\right)^2}$, где a, b — стороны оснований пирамиды, c — её боковое ребро.

32.22. Площадь полной поверхности полушара равна $1{,}5S$.

32.23. Пересечение этих шаров образует линзу толщиной $\dfrac{R}{2}$. Эта линза является объединением двух одинаковых шаровых сегментов высотой $\dfrac{R}{4}$. Объём линзы равен (с учётом формулы задачи **30.3**) $\dfrac{11\pi R^3}{96}$, а площадь поверхности равна πR^2.

32.24. Так как высота пирамиды равна $\dfrac{d}{\sqrt{3}}>\dfrac{d}{2}$, то часть сферы внутри пирамиды есть просто часть сферы внутри прямого трёхгранного угла. Очевидно, что указанная часть составляет одну восьмую часть сферы, а тогда и площадь этой части равна одной восьмой площади сферы.

32.25. Пусть R, H — радиус основания и высота конуса с большим основанием, r, h — радиус основания и высота конуса с меньшим основанием.

Рассмотрим общую окружность поверхностей указанных конусов и найдём её радиус. Площадь поверхности объединения конусов равна сумме площадей большего из оснований, боковой поверхности усечённого конуса и боковой поверхности конуса, основание которого есть окружность пересечения конических поверхностей. Радиус r_1, а также высоту верхнего конуса h_1 нетрудно найти из подобия треугольников в осевом сечении. Имеем $r_1 = \frac{rR(h-H)}{Rh-rH}$, $h_1 = \frac{Rh(h-H)}{Rh-rH}$. Теперь осталось применить формулы площадей. Получаем о т в е т:

$$S = \pi R\left(R + \sqrt{R^2+H^2} + r\frac{(h-H)^2}{(Rh-rH)^2}\left(R\sqrt{r^2+h^2} - r\sqrt{R^2+H^2}\right)\right).$$

32.26. Рассмотрим осевое сечение шара. Получим равнобедренный треугольник, радиус описанной окружности которого равен R, а высота равна $R + d$. Тогда радиус основания конуса легко вычислить по формуле $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, а образующую конуса получим равной $l = \sqrt{2R^2 + 2Rd}$, откуда площадь поверхности конуса равна

$$S = \pi\left(\sqrt{R^2-d^2}\cdot\sqrt{2R(d+R)} + R^2 - d^2\right).$$

32.27. Боковая поверхность цилиндра равна $2\pi RH$. Боковая поверхность одного усечённого конуса составляет $\frac{3}{4}$ боковой поверхности исходного неусечённого конуса (так как отсекаемый конус подобен исходному с коэффициентом $\frac{1}{2}$). Высота исходного конуса равна H, образующая равна $\sqrt{R^2+H^2}$, тогда площадь боковой поверхности данного тела равна $\frac{3}{4}\pi R\sqrt{R^2+H^2}$. Сравнивая указанные площади, получаем, что при $R > \frac{\sqrt{7}}{3}H$ площадь боковой поверхности тела больше площади боковой поверхности цилиндра, если же $R < \frac{\sqrt{7}}{3}H$, то площадь боковой поверхности тела меньше.

32.28. а) Поверхность многогранника складывается из поверхностей граней параллелепипеда (или частей граней). Тогда наибольшей площади поверхности не будет, так как ясно, что площадь поверхности может быть сколь угодно близкой к удвоенной площади поверхности параллелепипеда (один из параллелепипедов чуть-чуть налезает на другой), но достигнуть этого значения не сможет, так как два параллелепипеда с общим ребром не являются многогранником.

б) Для получения площади поверхности из суммарной площади поверхностей параллелепипедов вычитаются площади тех частей граней, которые оказались внутри полученного тела. Наименьшей площадь поверхности будет в том случае, если параллелепипеды будут соприкасаться наибольшими по площади гранями. Искомая площадь равна 32.

32.29. Пусть a — ребро основания призмы. Тогда высота призмы равна $\dfrac{4V}{a^2\sqrt{3}}$. Площадь поверхности призмы получаем равной $S = \dfrac{4\sqrt{3}\,V}{a} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Дифференцируя по a, получим наименьшую площадь поверхности призмы при $a = \sqrt[3]{4V}$, равной $\dfrac{3\sqrt{3}\,(\sqrt[3]{4V})^2}{2}$. Ясно, что при уменьшении высоты призмы площадь основания, а значит, и площадь всей поверхности призмы будут неограниченно возрастать.

32.30. Площадь всей поверхности призмы будет наибольшей при наибольшей площади боковой поверхности (так как площади оснований постоянны). Площадь боковой поверхности равна периметру перпендикулярного сечения, умноженному на ребро. Периметр перпендикулярного сечения не превосходит периметр основания. Таким образом, боковая поверхность имеет наибольшую площадь, если призма прямая.

Теперь легко найти наибольшую площадь поверхности: $S_{\max} = 200 + 12\sqrt{10}$.

32.31. Площадь поверхности третьей грани может быть от $|S_1 - S_2|$ до $S_1 + S_2$ (так как сторона основания может изменяться от разности до суммы двух других сторон). Таким образом, площадь боковой поверхности меняется от $2\max\{S_1; S_2\}$ до $2(S_1 + S_2)$, достигая крайних значений в вырожденных случаях.

32.32. Грани APB и ACB являются равными равнобедренными треугольниками с основанием d и углом при основании φ. Тогда грани PAC и PBC являются равнобедренными треугольниками с боковой стороной $\dfrac{d}{2\cos\varphi}$ и углом φ при вершине. Теперь легко вычислить площадь поверхности тетраэдра: $S = \dfrac{d^2}{4\cos^2\varphi}(\sin\varphi + \sin 2\varphi)$, при этом угол φ может быть от 0 до 90°. Площадь поверхности принимает значения от 0 до $+\infty$ (что видно из формулы).

32.33. Площадь каждой грани не превосходит 0,5. Эта величина для каждой грани достигается в вырожденном случае, когда тетраэдр представляет собой квадрат $APBC$ с единичной стороной. Таким образом, наибольшая площадь поверхности в вырожденном случае равна 2.

Если $|PC| \neq |AB|$, то максимум площади не достигается. Действительно, ясно, что предыдущий пример может быть незначительно изменён так, чтобы $|PC| \neq |AB|$. В то же время площадь поверхности, равная 2, достигается только тогда, когда все треугольники граней прямоугольные, что бывает лишь в указанном выше случае.

32.34. Поверхность тетраэдра состоит из двух равносторонних треугольников с единичной стороной и двух равных равнобедренных треугольников с общим основанием и боковой стороной, равной 1. Таким образом, наибольшая площадь поверхности будет в том случае, когда наибольшей будет площадь каждого указанного равнобедренного треугольника. Площадь треугольника наибольшая в том случае, когда угол при вершине прямой. Ясно, что угол при вершине может быть прямым (он меняется от 0 до 120° при изменении двугранного угла между плоскостями равносторонних треугольников). Таким образом, наибольшая площадь поверхности равна $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

32.35. Найдём высоту пирамиды по формуле $h = \frac{3V}{S}$ (S — площадь основания), затем радиус вписанной окружности основания по формуле $r = \frac{\sqrt{S}}{3^{\frac{3}{4}}}$. Тогда можно найти косинус двугранного угла при ребре основания: $\cos\alpha = \frac{S^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{S^3 + 3^{\frac{7}{2}} V^2}}$, после чего находим площадь боковой поверхности пирамиды как $\frac{S}{\cos\alpha}$. Подставив найденное значение косинуса, получаем площадь боковой поверхности как функцию площади основания: $S_{\text{б.п}} = \sqrt{S^2 + 3^{\frac{7}{2}} \cdot \frac{V^2}{S}}$. Взяв производную, найдём, что площадь боковой поверхности минимальна при $S = \frac{3^{\frac{7}{6}}}{2^{\frac{1}{3}}} V^{\frac{2}{3}}$ и равна $\sqrt[3]{\frac{243V^2}{2}}$.

Ясно, что площадь боковой поверхности может быть сколь угодно большой при малой S.

Не составляет труда получить площадь полной поверхности как функцию от S (прибавить S к уже рассмотренной функции). Получающееся при взятии производной уравнение имеет решением $S = \frac{3^{\frac{7}{6}} V^{\frac{2}{3}}}{2}$, откуда минимальная площадь полной поверхности равна $2 \cdot 3^{\frac{7}{6}} V^{\frac{2}{3}}$ и достигается в случае правильного тетраэдра.

32.36. а) Ясно, что это сегмент, для которого дуга большого круга, соединяющая указанные точки, служит диаметром на сфере.

б) Если треугольник, составленный из данных точек, остроугольный либо прямоугольный, то наименьшей будет площадь сегмента, окружность основания которого описана около треугольника (так как площадь сегмента пропорциональна его высоте, которая растёт вместе с радиусом окружности основания, если считать, что сегмент меньше полушара). В случае тупоугольного треугольника наименьшей будет площадь сегмента, окружность основания которого построена на наибольшей стороне как на диаметре.

Это связано с решением планиметрической задачи о том, какова окружность наименьшего радиуса, содержащая данный треугольник.

в) Это будет сегмент, описанный в предыдущем пункте для одной из троек точек.

32.37. Решение этой задачи полностью аналогично решению задачи **32.29**. Поэтому приведём здесь лишь о т в е т ы:

а) Функция для площади полной поверхности $S = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$, где r — радиус основания. Площадь изменяется от $3(2\pi)^{\frac{1}{3}} V^{\frac{2}{3}}$ до $+\infty$.

б) Функция для площади боковой поверхности $S = \frac{2V}{r}$, тогда указанная площадь меняется от 0 до $+\infty$, где 0 не включается.

32.38. Задача является обратной к предыдущей. Поэтому объём будет меняться от 0 до $\frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ в п. «а» и от 0 до $+\infty$ в п. «б».

32.39. Фактически спрашивается, какова наибольшая площадь прямоугольника с данной диагональю. Так как площадь прямоугольника равна уполовиненному квадрату диагонали, умноженному на синус угла между диагоналями, она будет наибольшей, если угол равен 90°, и равна в этом случае $\frac{d^2}{2}$.

32.40. а) Если конус будет высокий с маленьким радиусом основания, то площадь его боковой поверхности может быть сколь угодно малой. С другой стороны, в вырожденном случае конуса, когда радиус основания совпадает с образующей, площадь боковой поверхности конуса равна πL^2. Поэтому площадь боковой поверхности конуса меняется от 0 до πL^2.

б) Те же вырожденные случаи определяют пределы изменения полной поверхности конуса от 0 до $2\pi L^2$.

32.41. Найдём образующую по формуле $l = \frac{S}{\pi r}$.

а) Имеем для высоты формулу $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{\frac{S^2}{\pi^2 r^2} - r^2}$, а тогда для объёма получаем формулу $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{\frac{S^2}{\pi^2 r^2} - r^2}$. После дифференцирования получаем, что объём будет наибольшим при $r = \sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}$, при этом $V \to 0$ при $r \to 0$.

б) Наибольшая площадь поверхности будет в вырожденном случае, когда площадь основания равна площади боковой поверхности, т. е.

$$r = l = \sqrt{\frac{S}{n}}.$$

Площадь основания может быть сколь угодно малой, если конус будет высоким и узким. Поэтому наименьшая площадь поверхности не достигается. Точная нижняя граница площади полной поверхности конуса равна S.

32.42. Найдём высоту конуса через радиус основания: $h = \frac{3V}{\pi r^2}$, отсюда получим образующую:

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{r^2 + \frac{9V^2}{\pi^2 r^4}}.$$

Для площади боковой поверхности имеем формулу $S = \pi r \sqrt{r^2 + \frac{9V^2}{\pi^2 r^4}}$, а для площади полной поверхности — формулу $S_1 = \pi r \sqrt{r^2 + \frac{9V^2}{\pi^2 r^4}} + \pi r^2$. Исследовав эти формулы с помощью производной, получаем:

а) у площади боковой поверхности наименьшее значение достигается при $r = \frac{\sqrt[3]{3V}}{\sqrt[6]{2\pi^2}}$, т. е. при отношении образующей к диаметру основания, равном $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Наибольшее значение площади боковой поверхности не достигается (радиус основания может быть сколь угодно большой, при этом образующая не меньше этого радиуса, поэтому площадь боковой поверхности может быть сколь угодно большой);

б) Наибольшей площади у полной поверхности при данном объёме нет (это следует из пункта «а»). Наименьшая площадь достигается при $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$. Искомое отношение равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Обращает на себя внимание сходство формул этой задачи и задачи **32.35**, что не случайно, ибо фактически в обеих указанных задачах ставилась задача об экстремуме площади поверхности конуса с известным объёмом.

32.43. а) Очевидно из геометрических соображений, что площадь боковой поверхности может меняться от 0 (высокий конус с точечным основанием) до πR^2 (вырожденный конус, у которого боковая поверхность совпадает с основанием).

б) Из тех же соображений получаем границы площади полной поверхности от 0 до $2\pi R^2$.

в) Пусть h — высота конуса. Тогда для радиуса основания имеем $r = \sqrt{R^2 - h^2}$, откуда объём равен: $V = \frac{\pi}{3} h(R^2 - h^2)$. Наибольшее значение объёма получается равным $\frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$ при $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$. Наименьшее значение объёма равно нулю, и достигается оно в вырожденных случаях, указанных в предыдущих пунктах.

32.44. Так как радиус большого круга не превосходит L, то наибольший радиус равен L. При этом и площадь поверхности конуса, и площадь поверхности полушара тоже будут наибольшими. Площадь поверхности тела будет равна $3\pi L^2$. Наименьшая площадь поверхности, очевидно, равна 0 (достигается в случае конуса, вырожденного в отрезок, при этом полушар вырождается в точку).

32.45. Действительно, скорость изменения есть производная функции по аргументу. Естественным аргументом для площади сферы является радиус. Продифференцировав площадь сферы по радиусу, получим $8\pi R$, что пропорционально радиусу.

32.46. а) Да. Указанные расстояния есть длины сторон перпендикулярного сечения. Поэтому останется воспользоваться формулой задачи **32.3.**

б) Нет. Ясно, что стороны основания могут быть сделаны практически любыми, не меньшими сторон перпендикулярного сечения (это боковые стороны параллелограмма, у которого известны основание и высота), значит, любой может быть и его площадь.

в) Да. Из формулы объёма призмы как произведения площади перпендикулярного сечения на ребро.

32.47. Нет. Рассмотрим, например, прямоугольный тетраэдр. Пусть известна площадь его грани, являющейся прямоугольным треугольником. Тогда, измеряя его плоские углы, можно найти непрямой двугранный угол при основании, откуда найти площадь грани, не являющейся прямоугольным треугольником. Меняя катеты исходной грани так, чтобы её площадь оставалась постоянной, и оставляя найденный двугранный угол неизменным, мы меняем площади двух других граней.

32.48. Не всегда. Если даны три ребра — стороны прямоугольного треугольника, являющегося гранью, то по ним найти площадь поверхности нельзя (ибо длину ребра, перпендикулярного указанной грани, можно менять).

Если же даны три ребра, выходящие из вершины прямого угла, то можно найти все рёбра тетраэдра, после чего найти и площадь его поверхности.

Также можно найти все рёбра тетраэдра, если известны стороны его грани, не являющейся прямоугольным треугольником. В этом случае оставшиеся рёбра находим из системы трёх теорем Пифагора.

Легко найти все рёбра тетраэдра, если известны два катета одной из граней — прямоугольного треугольника и ребро грани, не являющейся прямоугольным треугольником, и не являющееся гипотенузой взятой ранее грани.

В последнем случае (даны два ребра грани, не являющейся прямоугольным треугольником, и один катет) все рёбра тетраэдра тоже легко найти.

32.49. Докажем здесь одно полезное утверждение: пусть выпуклый многогранник находится внутри другого выпуклого многогранника, тогда площадь поверхности внутреннего многогранника не превосходит площади поверхности внешнего.

Для доказательства указанного утверждения воспользуемся леммой: площадь поверхности всех граней выпуклого многогранника, кроме одной, больше, чем площадь оставшейся грани (сравните с неравенством многоугольника).

Лемма доказывается очень просто. Рассмотрим проекцию многогранника на плоскость выбранной грани. Она покрывает эту грань. Осталось заметить, что площадь проекции грани не превосходит самой грани.

Теперь докажем исходное утверждение. Проведём плоскость грани внутреннего многогранника. Тогда внешний многогранник разбивается этой плоскостью на два многогранника, внутри одного из которых лежит внутренний многогранник. Площадь части поверхности внешнего многогранника, лежащей по другую сторону от секущей плоскости, будет больше площади сечения. Поэтому при переходе от исходного внешнего многогранника к его части, в которой лежит внутренний многогранник, площадь поверхности внешнего многогранника уменьшается. Повторяя указанный процесс для других граней внутреннего многогранника, получаем нужное утверждение.

Из этого следует, что внутри правильной призмы не может находиться никакая выпуклая пирамида с большей площадью поверхности. Если рассмотреть невыпуклую пирамиду, то, сделав периметр её основания сколь угодно большим, можно получить пирамиду внутри с площадью поверхности большей, чем у призмы.

32.50. Да. Находим косинус двугранного угла при основании как отношение площади проекции боковой грани к площади самой грани, затем находим высоту и объём.

32.51. Радиус окружности, описанной около основания пирамиды, найдём по формуле $r = \sqrt{2RH - H^2}$ (как радиус основания шарового сегмента высотой H). Сторона основания находится по формуле:

$$a = r\sin\frac{180°}{n} = \sqrt{2RH - H^2}\,\sin\frac{180°}{n}.$$

Радиус вписанной окружности основания вычислим как $r_1 = r\cos\frac{180°}{n} = \sqrt{2RH - H^2}\,\cos\frac{180°}{n}$. После этого найдём апофему боковой грани: $h = \sqrt{H^2 + r_1^2} = \sqrt{H^2\sin^2\frac{180°}{n} + 2RH\cos^2\frac{180°}{n}}$. Площадь поверхности пирамиды равна полупериметру основания, умноженному на сумму высоты и радиуса вписанной окружности основания:

$$S_n = \frac{n}{2}\left(\sqrt{H^2\sin^2\frac{180°}{n} + 2RH\cos^2\frac{180°}{n}} + \sqrt{2RH - H^2}\,\cos\frac{180°}{n}\right)\sqrt{2RH - H^2}\,\sin\frac{180°}{n}.$$

При увеличении n площадь поверхности пирамиды увеличивается (достаточно положить n непрерывной переменной и взять производную). Таким же образом можно убедиться, что боковая поверхность тоже возрастает.

Площадь поверхности (а также площадь боковой поверхности) пирамиды при возрастании высоты пирамиды и подобном изменении многоугольника основания меняется не монотонно. В этом можно убедиться на примерах граничных вырожденных случаев ($H = 0$ и $H = 2R$), когда площадь боковой поверхности пирамиды равна 0.

32.52. Да. Возьмём куб, вписанный в данный шар радиуса r. Сторона куба равна $\frac{2r}{\sqrt{3}}$. Разделим куб на n^3 равных кубиков и в каждый впишем сферу. Радиус этой сферы равен половине стороны маленького куба и равен $\frac{r}{n\sqrt{3}}$. Тогда площадь поверхности этой сферы равна $\frac{4\pi r^2}{3n^2}$, а суммарная площадь поверхностей всех сфер равна $\frac{4\pi r^2}{3}$. При соответствующем выборе n она может быть сколь угодно большой.

32.53. Нет. Для доказательства можно использовать утверждение в решении задачи **32.49** для выпуклых многогранников, находящихся внутри данного шара. Так как площадь поверхности шара есть предел площадей поверхностей этих многогранников, а площадь поверхности каждого меньше площади поверхности объёмлющего тела, то и предел будет не больше указанной площади.

Отметим, что доказательство утверждения, использованного в задаче **32.49**, нужно изменить так, чтобы оно подходило для любых объёмлющих тел, а не только выпуклых многогранников. Для этого нужно сначала доказать указанное утверждение для невыпуклых объемлющих многогранников (точно так же доказывается лемма, всё доказательство дословно повторяет указанное выше), а затем приблизить площадь произвольного тела к площади внутреннего многогранника.

32.54. Соображение может быть таким. Если DR мало, то можно поверхность сферы разбить на много малых кусочков, каждый из которых считать плоским. Часть объёма тела, заключённого между сферами, «вырезаемую» этим кусочком (ограниченную конической поверхностью с вершиной в центре сферы, сечением которой является данный кусочек), можно считать цилиндрической. Тогда объём пропорционален площади основания.

Недостаток такого подхода в том, что если объём тела зависит более чем от одного параметра, то указанным образом легко этот объём не сосчитать.

32.55. а) Да, если высота сегмента равна $\frac{2r}{5}$, где r — радиус шара. Это соотношение непосредственно выводится из уравнения равенства площадей.

б) Да. Это верно из соображений непрерывности. У маленького шарового сектора площадь поверхности мала, у шарового сектора — половины шара — площадь поверхности больше, чем площадь полусферы. Значит, где-то указанное равенство будет достигнуто.

Соображения непрерывности могли быть применены и в решении п. «а».

32.56. Эти части являются шаровыми сегментами, сумма высот которых равна диаметру шара. Тогда составим систему из трёх уравнений с тремя неизвестными (две высоты сегментов и радиус шара):

$$\begin{cases} h_1 + h_2 = 2R, \\ 2\pi R h_1 + \pi(2Rh_1 - h_1^2) = S_1, \\ 2\pi R h_2 + \pi(2Rh_2 - h_2^2) = S_2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $\pi R^2 = \dfrac{S_1 + S_2 + \sqrt{13S_1^2 + 13S_2^2 - 22S_1S_2}}{12}$, откуда легко найти площадь сферы:

$$S = \frac{S_1 + S_2 + \sqrt{13S_1^2 + 13S_2^2 - 22S_1S_2}}{3}.$$

32.57. Конечно, не равны. Достаточно взять пояс у верхушки шара и пояс, содержащий центр шара как центр симметрии, площади которых равны половине площади сферы.

32.58. Да. Поделив выражение для площади сегмента на выражение для площади сферы, получим отношение высоты сегмента к радиусу шара. Тогда, подставив это отношение в формулу объёма сегмента, получим ответ, выраженный через куб радиуса шара, что и позволит решить поставленную задачу. Обратная задача решается так же. Различие лишь в том, что для нахождения отношения высоты сегмента к радиусу шара требуется решить кубическое уравнение.

32.59. Да. Схема решения задачи приведена в **32.23**.

32.60. Нет. Нетрудно проверить, что результат этой процедуры не даст формулу площади сегмента. Её можно получить, оставляя высоту сегмента неизменной и меняя радиус сферы (так, что старая и новая сферы касаются друг друга внутренним образом).

32.61. Нет. Ясно, что у конуса, подобного исходному, все отношения такие же. В то же время достаточно знать один линейный размер конуса (им можно заменить одно из данных отношений), чтобы выяснить его площадь поверхности.

32.62. В общем случае ответ на вопрос отрицательный (если плоскости сечений на одинаковом расстоянии от оси, то фактически известна лишь одна площадь сечения). Даже если даны две различные площади сечения, цилиндр всё равно не определён. Рассмотрим очень высокий цилиндр с большим радиусом основания. Тогда существует сечение любой площади, меньшей площади осевого сечения, в том числе и данных площадей. Ясно, что у двух таких цилиндров разными являются все величины, указанные в задаче.

32.63. а) Да. Вычитая из площадей поверхностей площади боковых поверхностей, получаем, что равны площади оснований, а значит, и сами основания. Значит, равны и высоты.

б) Да. Поделив уравнения, выражающие равенства объёмов и площадей боковых поверхностей, друг на друга, получим равенство радиусов оснований, из чего получим и равенство высот.

в) Да. Пусть объём цилиндра равен πV, а площадь его поверхности равна $2\pi S$. Тогда для радиуса основания и высоты имеем $r^2h = V$, $rh + r^2 = S$. Выразив из первого уравнения h и подставив во второе, получаем $r^3 - Sr - V = 0$. Достаточно показать, что это уравнение имеет единственное положительное решение. Заметим, что левая его часть, рассматриваемая как функция от r, убывает на $\left[0; \sqrt{\frac{S}{3}}\right]$ и возрастает на $\left[\sqrt{\frac{S}{3}}; +\infty\right)$. При этом в нуле у этой функции отрицательное значение. Уравнение имеет единственное положительное решение, лежащее на $\left[\sqrt{\frac{S}{3}}; +\infty\right)$.

32.64. Да. Имеем для высоты h радиуса основания цилиндра r и радиуса шара R равенства $rh + r^2 = 2R^2$, $3r^2h = 4R^3$. Выразив из второго равенства h и подставив в первое, получим уравнение $3r^3 - 12R^2r + 4R^3 = 0$. Легко увидеть, что при $r = R$ левая часть меньше 0. Тогда, так как старший коэффициент положителен, левая часть обратится в 0 при некотором $r > R$.

32.65. Отсекаемый конус подобен исходному с коэффициентом $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Поэтому его площадь боковой поверхности составляет больше половины боковой поверхности исходного. Тем самым ответ в п. «б» отрицательный.

Так как отсекаемая часть боковой поверхности составляет фиксированную часть $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ поверхности конуса и не зависит от площади основания, последнюю можно сделать такой, что отсечённая площадь поверхности не будет равна оставшейся. Это и позволит дать отрицательный ответ в п. «а». Правда, следует отметить, что такой конус существует в отличие от п. «б».

32.66. Задача решается аналогично задаче **32.63** и имеет те же ответы.

32.67. Эта задача решена в процессе решения задачи **32.63.**

32.68. Так может быть. Пусть у одного конуса радиус основания равен 3, а образующая — 7, у другого конуса радиус основания равен 4, а образующая — 5. Нетрудно проверить, что указанные конусы являются искомым примером.

32.69. а) Да. Действительно, получаем, что радиус сферы равен половине радиуса основания. Заметим, что существует равнобедренный треугольник, радиус вписанной окружности которого равен четверти основания (так как у равностороннего треугольника радиус вписанной окружности больше четверти основания, а у прямоугольного — меньше).

Положив указанный треугольник осевым сечением конуса, получим, что у вписанной сферы данного конуса площадь такая же, как у основания.

б) Пусть такая сфера существует. Тогда у вписанной сферы площадь поверхности должна быть не меньше, чем площадь боковой поверхности конуса. Получаем неравенство $4r^2 > RL$ (*), где r — радиус вписанной сферы, R — радиус основания, L — образующая конуса. Решив планиметрическую задачу нахождения радиуса вписанной окружности равнобедренного треугольника, приходим к равенству $r = \sqrt{\dfrac{R^2(L-R)}{L+R}}$. Подставив r в неравенство (*) и проведя преобразования, приходим к неравенству $L^2 - 3RL + 4R^2 \geqslant 0$, которое не имеет решений. Таким образом, ответ отрицателен.

32.70. Да. Для получения боковой поверхности конуса нужно менять один радиус цилиндра, оставляя высоту неподвижной. Для получения площади усечённого конуса нужно менять радиусы двух оснований. Площадь цилиндра получается также изменением радиуса одного основания. Во всех указанных примерах высоту следует оставлять неизменной.

32.71. Это произошло потому, что за основание параллелепипеда принимались разные грани. Площадь поверхности параллелепипеда по этим данным узнать легко. Пусть a, b, c — измерения параллелепипеда. Тогда нам известны $ab + bc$, $ab + ac$ и $ac + bc$. Отсюда сами находим величины ab, bc, ac, а затем площадь поверхности как $2(ab + bc + ac)$. Для произвольного параллелепипеда решение остаётся таким же, лишь с заменой произведений измерений на площади граней. Впрочем, находить площади граней необязательно. Сложив известные величины площадей боковых поверхностей, получаем удвоенную площадь полной поверхности.

32.72. Да. Решение следует из решения задачи **32.52**. Отметим, что достаточно сделать из данного два шара. Полезно обобщить задачу для суммарной площади n м^2.

32.73. а) На 100, так как при уменьшении радиуса в 10 раз площадь поверхности уменьшается в 100 раз.

б) Если считать слой краски пренебрежимо тонким по сравнению с размерами шара, то объём краски пропорционален толщине слоя. Значит, краски хватит примерно на 50 шаров.

в) Из соображений предыдущего пункта получаем ответ: более 200 шаров.

32.74. Нет. Часть поверхности пузырей будет внутри, поскольку два слипшихся пузыря не образуют сферу.

32.75. Будем считать Землю шаром известного радиуса R. Тогда получаем из прямоугольного треугольника высоту сферического сегмента, поверхность которого видна со спутника, равной $\dfrac{RH}{R+H}$. Площадь указанного сегмента равна $\dfrac{2\pi R^2 H}{R+H}$, соответствующая часть поверхности Земли равна $\dfrac{H}{2(R+H)}$.

32.76. Хватит четырёх спутников. Они должны находиться на такой высоте, чтобы видеть части сферы, высекаемые плоскостями граней правильного тетраэдра, вписанного в эту сферу. Если R — радиус Земли, то радиус окружности, описанной около грани правильного тетраэдра, равен $\dfrac{2\sqrt{2}R}{3}$. Тогда получаем, что спутник должен находиться на высоте $2R$.

32.77. Видимо, был вычислен объём льдов Гренландии и поделён на площадь поверхности океанов (возможно, впрочем, что и на площадь Земли). При этом считали, что слой воды, образовавшийся в результате таяния льдов, пренебрежимо малой толщины по сравнению с радиусом Земли. Поэтому реальная толщина этого слоя несколько меньше.

32.78. Конечно, экономнее, но такой бидон мало удобен. Наиболее экономичным является шарообразный бидон (при данной площади поверхности шар имеет наибольший объём).

32.79. Пусть O — центр шара, целиком лежащего внутри многогранника. Тогда рассмотрим пирамиды с вершиной O и основаниями — гранями многогранника. Высота каждой пирамиды не меньше радиуса шара, поэтому утроенный объём каждой пирамиды не меньше площади основания, умноженной на радиус шара. Сложив все такие неравенства, получаем правое неравенство (причём равенство достигается только в случае вписанного шара).

Для доказательства левой части неравенства построим на каждой грани внутрь многогранника прямую призму высоты $\frac{V}{S}$. Тогда суммарный объём этих призм равен как раз V. Но эти призмы имеют общие точки (например, любые две соседние призмы), поэтому остаётся точка, не покрытая ни одной из призм. Тогда расстояние от этой точки до любой грани больше $\frac{V}{S}$.

Заметим, что правым неравенством мы пользовались при рассмотрении наибольших сфер, помещаемых в данный многогранник.

32.80. Да, эти формулы получить можно. Нужно положить стороны верхнего основания равными сторонам нижнего для призмы или нулевыми для пирамиды.

Задачи к § 33

В данном параграфе много задач, предоставляющих простор для фантазии учащихся. Намеренно неконкретизированные условия задач **33.1—33.4** позволяют получить достаточно много способов решения. В данном случае мы ограничились одним из возможных решений этих задач. Полезно решать такие задачи без ограничения арсенала используемых средств.

33.1. Например, провести на сфере окружность с центром в одной из вершин двуугольника. Искомый угол измеряется частью дуги этой окружности, лежащей внутри двуугольника

33.2. Решения всех пунктов указанной задачи предполагают возможность проводить через данную точку большую окружность, проводить окружность заданного радиуса с заданным центром на сфере, делить дуги окружностей на 2, 4 и т. д. частей.

а) Например, провести две большие окружности через данную точку.

б) Проведём с центром в одной из этих точек окружность, проходящую через другую точку. Тогда искомая большая окружность делит проведённую пополам. Тем самым диаметрально противоположная данной точка на проведённой окружности также лежит на искомой окружности.

Итак, получили три точки искомой окружности, одна из которых есть середина дуги между двумя другими. Проведём через эту точку большую окружность, перпендикулярную искомой (для этого надо проведённую окружность разделить на 4 части). Отмерив четверть дуги большой окружности от данной точки, получим центр искомой окружности.

в) Пользуясь рассуждениями из предыдущего пункта, проведём большие окружности, образующие треугольник с вершинами в данных точках, затем поделим стороны треугольника пополам и проведём большие окружности, перпендикулярные сторонам. Точка их пересечения — центр искомой окружности.

г) Окружностей, касающихся данной, будет бесконечно много. Можно строить их, например, так. Взять на данной окружности произвольную точку, провести через неё и центр дугу большого круга, отложить по этой дуге радиус данной окружности и с центром в полученной точке и радиусом исходной окружности провести окружность.

33.3. Следует провести окружность с центром в полюсе, проходящую через данную точку. Дуга нулевого меридиана от полюса до точки пересечения с окружностью даст нам широту точки. Долготу даст дуга проведённой окружности от пересечения с меридианом до указанной точки.

33.4. Так как площадь части сферы, ограниченной окружностью данного радиуса (сферического сегмента), не зависит от того, где именно находится данная окружность на сфере, то указанная площадь равна разности площадей двух сферических сегментов, ограниченных данными окружностями (разумеется, здесь предполагается, что данные окружности каким-то образом заданы, например своим радиусом).

33.5. Такое же утверждение имеет место для трёх окружностей в плоскости с центрами, не лежащими на одной прямой (искомая окружность должна пересекать данные по концам диаметров). Тем самым аналогичным построением такую же окружность можно получить на сфере.

33.6. Так как равенство плоских углов трёхгранного угла влечёт равенство двугранных углов (см.: «Геометрия, 10», задача **14.60),** то из равенства углов сферического треугольника получаем равенство его сторон.

33.7. Утверждения, допускающие аналогию с планиметрией, таковы:

Длина перпендикуляра из точки на прямую является кратчайшим расстоянием от точки до точек прямой (в качестве прямых выступают большие окружности, в качестве расстояний — угловые меры дуг больших окружностей).

Серединный перпендикуляр к отрезку является геометрическим местом точек, равноудалённых от его концов.

Не имеет места в планиметрии утверждение: «Существует треугольник с тремя прямыми углами».

33.8. Указанные аналогии перечислены в тексте п. 33.1. Там же приведены примеры утверждений, не имеющих места в сферической геометрии.

33.9. Запишем вторую теорему косинусов для трёхгранного угла: $\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{a}{R}$, где α, β, γ — углы сферического треугольника, a, b, c — длины его сторон. Тогда при стремлении R к бесконечности получаем $\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$, т. е. сумма углов треугольника равна 180°.

Первая теорема косинусов для трёхгранного угла не даёт ничего содержательного.

Запишем теперь теорему синусов: $\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin\alpha} = \frac{\sin\frac{b}{R}}{\sin\beta}$. Заменив на эквивалентную бесконечно малую величину, получаем обычную теорему синусов в треугольнике.

33.10. Они могут быть равнобедренные (в том числе равносторонние, причём разные равносторонние треугольники могут иметь разные углы).

Треугольники могут быть остроугольные, иметь один, два или три прямых угла, иметь один тупой угол.

Указанная классификация следует из свойств трёхгранных углов.

33.11. Очевидно, муравей был на полюсе (если пользоваться привычной ориентацией глобуса, то на Северном полюсе).

33.12. На Северный полюс. Действительно, движение на северо-восток означает приближение к Северному полюсу при выборе постоянного направления относительно вращения Земли. Поэтому путешественник будет двигаться по спирали на сфере, сходящейся к Северному полюсу.

33.13. а) Да. Достаточно измерить сумму углов треугольника. Именно это пытался сделать Гаусс, измеряя углы больших треугольников методами геодезии.

б) Да. Без доказательства примем, что сфера есть единственная поверхность постоянной положительной кривизны. Поэтому, измеряя углы треугольников и их площади и получив, что площадь пропорциональна углам, можно заключить, что планета сферическая.

в) Нет. Фактически увеличение размеров можно интерпретировать как изменение единицы длины. Поэтому если у существ нет фиксированной единицы длины (т. е. все эталоны также увеличиваются, включая и сами существа), то результаты любых проведённых измерений будут теми же, что и до увеличения.

33.14. Данная широта точки укажет радиус окружности, параллельной экватору, на которой точка находится, отсюда можно узнать расстояние от точки до плоскости экватора. Долгота даст расстояние от точки до плоскости нулевого меридиана, а также до плоскости, перпендикулярной плоскости нулевого меридиана. Таким образом, зная расстояния до трёх взаимно перпендикулярных плоскостей (фактически координаты точек в декартовой системе), выясняем расстояние между ними.

33.15. а) Указанное соотношение есть просто неравенство треугольника для двойственного трёхгранного угла. Плоские углы двойственного угла равны 180° без соответствующих двугранных. Получаем $180° - \angle A + 180° - \angle B > 180° - \angle C$, откуда следует требуемое.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ VII

Особенностью задач данной главы является то, что они предназначены по большей части для итогового повторения всего курса «стандартной» (т. е. не включающей векторы и преобразования) геометрии 11 класса. Поэтому задач, в которых используется понятие площади поверхности, в этом разделе немного. В основном же задачи сводятся к отысканию различных планиметрических элементов. Многие из задач данного раздела весьма нетривиальны (например, **VII.2**, **VII.14**, **VII.16**) и требуют большой вычислительной культуры.

VII.1. Так как указанная пирамида является равногранным тетраэдром, то, согласно утверждениям, сформулированным в задаче **23.31**, центры вписанной и описанной сфер такого тетраэдра совпадают.

VII.2. Расположение прямых углов в такой пирамиде объяснено в задаче **23.7**. Возможны два случая:

1) Боковое ребро перпендикулярно основанию. Тогда именно это ребро является наименьшим. Пусть дана пирамида $PABCD$ и $PA \perp ABC$ (рис. 77). Тогда в силу симметричности пирамиды относительно плоскости PAC центры вписанного и описанного шаров лежат в этой плоскости. Радиус вписанного шара равен $\frac{3V}{S} = 1$. Спроектируем вписанную сферу на плоскость ABC. Получится круг радиуса 1 с центром на диагонали, касающийся отрезков AB и AD. Значит, проекция центра вписанной сферы делит диагональ AC основания в отношении 1 : 2, считая от вершины A. Сам же этот центр находится на расстоянии 1 от прямой AC.

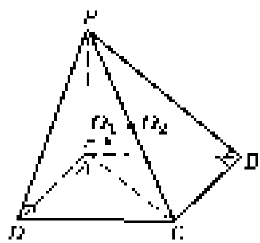

Рис. 77

Центр же описанной сферы будет являться центром описанной окружности треугольника PAC, т. е. серединой PC.

Таким образом, фактически мы получили плоскую систему координат с осями AC и AP, в которой координаты центра вписанной сферы равны

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3};\ 1\right)$, а координаты центра описанной сферы равны $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ 2\right)$. Тогда расстояние между центрами равно $\sqrt{\dfrac{19}{18}}$.

2) Другой случай не реализуется в силу того, что основание пирамиды квадратное.

VII.3. а) Если хотя бы одна плоскость боковой грани перпендикулярна плоскости основания, то граней — прямоугольных треугольников — будет, как минимум, две (так как одно из рёбер квадрата окажется перпендикулярным плоскости указанной грани, а значит, боковому ребру). Кроме того, из соображений симметрии боковые грани, смежные с правильным треугольником, равны. Значит, боковая грань, являющаяся прямоугольным треугольником, противоположна грани — правильному треугольнику. Из тех же соображений симметрии (относительно плоскости, проходящей через апофему правильного треугольника и соответствующую среднюю линию квадрата) вершина прямого угла будет при вершине P, причём полученный прямоугольный треугольник будет равнобедренным. Из той же симметрии следует, что центры обеих сфер лежат в плоскости симметрии PMN. Тем самым нам оказались известны длины всех рёбер пирамиды $|PA| = |PB| = 2$, $|PD| = |PC| = \sqrt{2}$, тогда мы можем вычислить и площадь полной поверхности.

Найдя высоту пирамиды как высоту в треугольнике MPN из вершины P, все стороны которого нам известны $\left(h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, находим радиус вписанной сферы $r = \dfrac{2\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}+\sqrt{7}}$. При этом центр вписанной сферы является центром вписанной окружности треугольника PMN. Однако, найдя радиус вписанной окружности треугольника PMN, убеждаемся, что он не равен найденному значению r, в то время как из симметрии ясно, что точки касания вписанной окружности с плоскостями граней PAB и PCD должны находиться на PM и PN соответственно.

Тем самым в данной пирамиде нет вписанной сферы.

б) Пусть $PABCD$ — данная пирамида и пусть треугольник PAB правильный. Тогда пирамида вновь симметрична относительно той же плоскости PMN, что и в предыдущем пункте, и прямоугольными треугольниками являются грани PAD и PBC (одна из них обязательно, другая из симметрии, а третьей нет). Так как указанные треугольники равнобедренные, то прямой угол находится в вершинах A и B соответственно.

Те же соображения, что и в предыдущем пункте, показывают, что центр вписанной сферы (если она есть) находится в плоскости PMN, а радиус вписанной сферы равен радиусу вписанной окружности указанного треугольника. Проверкой убеждаемся, что и в данном случае сферы, вписанной в пирамиду, нет.

в) Такой пирамиды нет. В силу соображений симметрии равносторонние треугольники могут быть лишь противоположными гранями. Но тогда все боковые рёбра равны рёбрам основания и все четыре грани являются равносторонними треугольниками.

VII.4. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2\pi R(R + H) = S, \\ \pi R^2 H = V, \end{cases}$$

получаем кубическое уравнение $2\pi R^3 - SR + 2V = 0$. Поэтому ответы в общем виде получены быть не могут.

VII.5. Это соотношение является выражением изопериметрического неравенства в пространстве: среди всех тел с данной площадью поверхности наибольший объём имеет шар. Именно поэтому капли жидкости принимают шаровидную форму в невесомости, так как минимум потенциальной энергии поверхностного натяжения достигается при минимальной площади поверхности.

VII.6. Для вычисления площади поверхности тела надо из площади поверхности шара вычесть площади двух шаровых сегментов, радиусы окружностей оснований которых равны $\frac{R}{2}$, и прибавить площадь цилиндрической поверхности внутри шара.

Если окружность основания сегмента вдвое меньше большой окружности сферы, то высота сегмента равна $R\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Тогда сумма площадей вычитаемых сегментов равна $2\pi R^2(2 - \sqrt{3})$, а прибавляемая площадь цилиндрической поверхности равна $2\pi R^2\sqrt{3}$. Таким образом, площадь поверхности полученного тела равна $4\pi R^2\sqrt{3}$.

VII.7. Проведём здесь наименее громоздкий подсчёт для куба. Из соображений симметрии центр шара лежит в центре куба (можно отметить без привлечения симметрии, что центр есть точка пересечения перпендикуляров к граням, восставленных в центрах граней). Поверхность куба отсекает от шара восемь шаровых сегментов, радиус основания которых равен половине стороны куба. Тем самым если a — сторона куба, то радиус шара равен $\frac{a}{\sqrt{2}}$, а высота каждого сегмента равна $\frac{a(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}}$, поверхность сегмента равна $\frac{\pi a^2(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}}$, т. е. суммарная площадь сегментов равна $3\pi(2 - \sqrt{2})a^2$. Площадь всей поверхности шара равна $2\pi a^2$. Искомое отношение теперь можно найти без труда. Пользуясь найденными величинами, находим объём сегмента, равный $\dfrac{\pi a^2(4\sqrt{2}-5)}{24}$, а тогда суммарный объём сегментов равен $\dfrac{\pi a^3(4\sqrt{2}-5)}{4}$. Объём всего шара равен $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. После этого искомое отношение находится без труда.

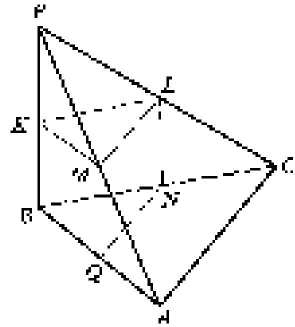

Рис. 78

VII.8. Пусть $KLMBNQ$ — данная призма (рис. 78) и $|KP| = a$. Тогда $|BK| = 1 - a$, откуда получаем для объёма призмы формулу:

$$V = a^2(1-a)\frac{\sqrt{3}}{4},$$

а для площади поверхности формулу

$$S = 3a(1-a) + a^2\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Исследуя эти функции, получаем, что объём меняется от 0 до $\dfrac{\sqrt{3}}{27}$, а площадь поверхности изменяется от 0 до $\dfrac{3}{13-4\sqrt{3}}$.

VII.9. Найдём параллелепипед с наибольшей площадью поверхности. Ясно, что при данной высоте параллелепипеда площадь поверхности будет наибольшей, если рёбра верхнего основания лежат на боковых рёбрах пирамиды (так как среди прямоугольников, вписанных в данный квадрат — сечение пирамиды, наибольшие площадь и периметр имеет сам этот квадрат). Если отношение стороны основания параллелепипеда к стороне основания пирамиды равно a, то из подобия треугольников отношение высоты параллелепипеда к высоте пирамиды равно $1 - a$. Тогда площадь поверхности параллелепипеда равна $2a^2l + 4a(1-a)lh$, где l — ребро основания, а h — высота пирамиды. Наибольшее значение площади поверхности достигается при $a = \dfrac{2lh}{l-2h}$, если $l > 2h$, и при $a = 1$, если $l < 2h$. Таким образом, указанные параллелепипеды не совпадают.

VII.10. Ясно, что основание внутренней пирамиды параллельно основанию внешнего тетраэдра. Пусть $k < 1$ — отношение высот тетраэдров. Тогда основание внутреннего тетраэдра подобно основанию внешнего с коэффициентом подобия $1 - k$, объём внутренней пирамиды составляет $k(1-k)^2$ объёма внешней. Исследовав это выражение, получим, что наибольшим объём будет при $k = \frac{1}{3}$ и равен $\frac{4}{27}$ объёма внешнего тетраэдра, т. е. $\frac{a^3\sqrt{2}}{162}$. Наименьший объём достигается в вырожденных случаях и равен 0.

VII.11. Пусть x — измерение прямоугольника, ставшее образующей цилиндра. Тогда $\sqrt{d^2 - x^2}$ — другое измерение (длина окружности основания получившегося цилиндра). Радиус основания получается равным $\frac{\sqrt{d^2 - x^2}}{2\pi}$, откуда объём полученной ёмкости равен $V = \frac{1}{4\pi} x\,(d^2 - x^2)$. Взяв производную по x, убеждаемся, что наибольший объём при $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ равен $\frac{d^3}{6\sqrt{3}\pi}$. Наименьший объём достигается в вырожденных случаях и равен 0.

VII.12. Ясно, что задачу достаточно решить лишь про границы объёма, так как площадь поверхности будет равна $\frac{3V}{r}$. Пусть двугранный угол при основании пирамиды равен α. Тогда радиус вписанной в основание окружности равен $r_1 = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, площадь основания пирамиды $S = n r_1^2 \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$, высота пирамиды равна $h = r_1 \operatorname{tg}\alpha$ и объём получаем равным

$$V = \frac{1}{3} r^3 n \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n} \operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3} r^3 n \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Указанное выражение легко исследовать на максимум и минимум даже без помощи производной, так как та его часть, которая находится до знака умножения, является в условиях задачи постоянной, а оставшаяся представляет собой обратную квадратичную функцию относительно $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. Таким образом, наименьший объём достигается при $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ и равен $\frac{8}{3} n \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n} r^3$. Объём может принимать любые значения, большие указанной величины.

Решение остаётся таким же в случае с конусом, меняется только формула объёма, из которой исчезает множитель $n\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$, вместо которого появляется π.

VII.13. Задача нахождения параллелепипеда наибольшего объёма, вписанного в данный шар, была решена в задаче **30.48**. Этот параллелепипед является кубом.

Пусть x, y, z — измерения нашего параллелепипеда. Тогда площадь его поверхности равна $2xy + 2yz + 2xz = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = (x + y + z)^2 - 4r^2$, где r — радиус описанного шара. Таким образом, площадь поверхности наибольшая, если наибольшей является сумма измерений. В силу неравенства о средних арифметическом и квадратическом для трёх чисел имеем $\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{3} \geqslant \frac{x + y + z}{3}$. В данном неравенстве равенство достигается лишь при равенстве $x = y = z$. Поэтому (учитывая, что $x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2$) параллелепипед наибольшей площади поверхности есть куб.

VII.14. Наименьшие объём и площадь поверхности будут у вырожденного цилиндра и равны 0.

Пусть теперь x — радиус основания цилиндра, h — высота исходного сегмента, r — радиус исходной сферы. Тогда образующая цилиндра равна $l = \sqrt{r^2 - x^2} - (r - h)$. Объём цилиндра вычисляем по формуле $V(x) = \pi x^2 (\sqrt{r^2 - x^2} - (r - h))$, а площадь поверхности — по формуле $S(x) = 2\pi x(\sqrt{r^2 - x^2} - (r - h)) + 2\pi x^2$. После взятия производной получаем, что наибольший объём достигается при x, квадрат которого является большим корнем уравнения $9t^2 - t(h^2 - 2rh - 5r^2) + 2r^3h - h^2r^2 = 0$. Что касается площади полной поверхности, можно показать, что она как функция x является убывающей при $h < r$, а тогда наибольшая площадь полной поверхности достигается в вырожденном случае, когда цилиндр превращается в дважды накрытую окружность основания шарового сегмента.

Остальные задачи решаются аналогично.

VII.15. Пусть h — высота шарового сегмента данного сектора. Тогда площадь сегмента равна $2\pi Rh$, а площадь боковой поверхности конуса равна $\pi R\sqrt{2Rh - h^2}$.

а) Решив неравенство $\pi R\sqrt{2Rh - h^2} > 2\pi Rh$, получим $h < \frac{8}{5}R$, а тогда искомый угол осевого сечения меньше $\arccos\frac{3}{5}$.

б) Объём конуса равен $\frac{1}{3}\pi(2Rh - h^2)(R - h)$, а объём шарового сегмента равен $\pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$. Решая неравенство

$\frac{1}{3}\pi(2Rh - h^2)(R - h) < \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$, получаем $h^2 - 3Rh + R^2 < 0$. У этого неравенства ответом является промежуток между корнями. Однако при получении формулы объёма конуса высота бралась как $R - h$, что верно лишь при $h < r$. Ясно, что при $h > R$ объём конуса будет меньше объёма соответствующего шарового сегмента (так как конус будет содержаться в указанном сегменте). Таким образом, при $h > \frac{3-\sqrt{5}}{2}R$ будет выполнено требуемое неравенство. Осталось найти углы в осевом сечении. Это все углы, большие $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

в) Площадь поверхности сектора имеем равной $2\pi Rh + \pi R\sqrt{2Rh - h^2}$. После взятия производной и проверки получаем, что наибольшая площадь будет у сектора, являющегося шаром.

г) Здесь не нужно никакой производной, чтобы убедиться, что наибольшим будет объём сектора, являющегося шаром (так как все остальные секторы в нём лежат).

VII.16. Практически требуется вычислить площади сегментов (одного маленького, а другого большого), которые касаются трёх данных. Таких сегментов, касающихся данных, будет четыре. Два из них касаются внешним образом (их центры диаметрально противоположны на сфере), а два — внутренним образом (они будут накрывать указанные три сегмента). Ясно, что центр таких сегментов будет равноудалён от центров исходных сегментов. Поэтому он будет лежать в центре равностороннего сферического треугольника, образованного центрами исходных сегментов.

Пусть радиус окружности основания данных сегментов равен $r = \sqrt{2R\cdot\frac{S}{2\pi R} - \left(\frac{S}{2\pi R}\right)^2} = \sqrt{\frac{S}{n} - \left(\frac{S}{2\pi R}\right)^2}$ (здесь R — радиус исходной сферы). Обозначим центры окружностей оснований данных сегментов через O_1, O_2, O_3, центр данной сферы через O, центр искомого сегмента через O_4. Обратимся к рисунку 79, *а*, где представлено сечение сферы плоскостью OO_1O_4 (K — точка касания искомого сегмента и сегмента с центром O_1). Найдём расстояние между центрами оснований исходных сегментов. Как видно из рисунка 79, *б*, это расстояние равно удвоенной высоте прямоугольного треугольника с гипотенузой R и катетом r. Итак, $a = \frac{r\sqrt{R^2 - r^2}}{R}$.

Из соображений симметрии ясно, что прямая OO_4 перпендикулярна плоскости $O_1O_2O_3$ и пересекает её в точке L — центре правильного треугольника $O_1O_2O_3$. Значит, $|O_1L| = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{r\sqrt{R^2 - r^2}}{R\sqrt{3}}$.

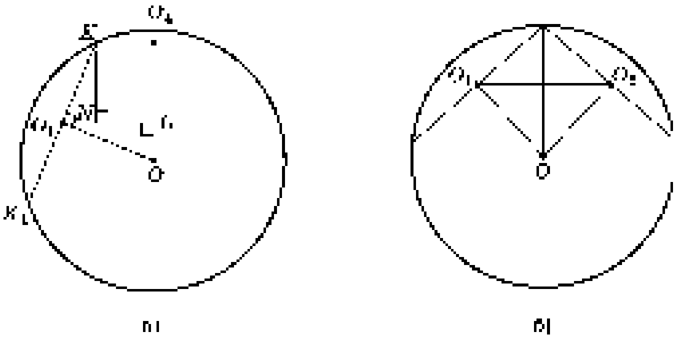

Рис. 79

Заметим теперь, что прямоугольные треугольники O_1LO и KNO_1 подобны. Тогда $|O_1N| = \dfrac{|OL| \cdot |O_1K|}{|OO_1|}$. Все входящие в это выражение отрезки легко находятся из прямоугольных треугольников. Имеем $|O_1N| = \dfrac{r\sqrt{3R^2 - r^2}}{R\sqrt{3}}$, откуда радиус окружности основания искомого сегмента равен

$$|NL| = |O_1L| - |O_1N| = \frac{r(\sqrt{R^2 - r^2} - \sqrt{3R^2 - r^2})}{R\sqrt{3}}.$$

Высота сегмента равна

$$h = R - \sqrt{R^2 - |NL|^2} = R - \frac{\sqrt{3R^4 - 4R^2r^2 + 2r^4 + 2r^2\sqrt{(R^2 - r^2)(3R^2 - r^2)}}}{R\sqrt{3}}.$$

Теперь можно найти искомую площадь:

$$S = 2\pi R\left(R - \frac{\sqrt{3R^4 - 4R^2r^2 + 2r^4 + 2r^2\sqrt{(R^2 - r^2)(3R^2 - r^2)}}}{R\sqrt{3}}\right).$$

Вычисление площади остальных сегментов ничем принципиально не отличается, кроме того, что точка K заменяется точкой K_1 на рисунке 79, *а*.

VII.17. а) Наименьшей по сумме длин рёбер пирамиды, каркас которой касается данной сферы, не существует. Действительно, наденем очень маленький правильный треугольник на сферу (он будет находиться почти на вершине сферы). Ясно, что существует точка, играющая роль вершины пирамиды, причём боковые рёбра этой пирамиды будут также малы по длине.

б), в) Пусть x — сторона основания пирамиды, y — боковая сторона, r — радиус данной сферы, a — расстояние от центра сферы до основания пирамиды (ясно, что центр сферы лежит на высоте пирамиды, а сама сфера пересекает грани по их вписанным окружностям).

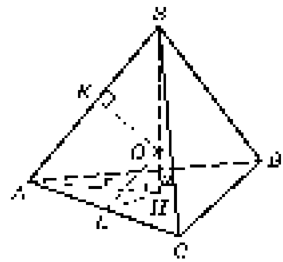

Рис. 80

Из прямоугольного треугольника OHL (рис. 80) получаем $\frac{x^2}{12} = r^2 - a^2$. Из подобия треугольников SKO и SHA имеем $\frac{x}{\sqrt{3}\,r} = \frac{|SA|}{|SO|}$ (здесь использовано то, что OK — радиус сферы, перпендикулярный касающемуся его отрезку). Выразив высоту пирамиды $\left(|SH| = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{3}}\right)$, получаем соотношение, содержащее y, откуда выражаем y через r и a: $y = \sqrt{r^2 - a^2}\,\frac{2ar + 4\sqrt{3}\,(r^2 - a^2)}{3r^2 - 4a^2}$. Теперь находим расстояние от центра сферы до боковой грани как корень из разности квадратов радиуса сферы и радиуса вписанной окружности: $b = \sqrt{r^2 - \frac{12(r^2 - a^2)(21r^4 + 16\sqrt{3}ar^3 - 16\sqrt{3}a^3r - 20a^2r^2)}{300r^4 + 432a^4 - 716a^2r^2 - 48\sqrt{3}a^3r + 40\sqrt{3}ar^3}}$. Ясно, что после получения подобных выражений нет никакой надежды на то, что корни производной могут быть найдены.

Таким образом, эта задача есть одна из тех нескольких, решение которой в общем виде точно найдено быть не может.

VII.18. Докажем вначале, что проекция Меркатора не изменит площадь шарового слоя (в том числе и шарового сегмента). Это следует из того, что шаровой слой высоты h проектируется в прямоугольник такой же высоты и ширины $2\pi R$, где R — радиус глобуса. Ясно, что площадь указанного прямоугольника равна площади слоя. Также равны площади частей слоя, вырезаемых двугранным углом на сфере и на меркаторовой проекции.

Для завершения доказательства осталось заметить, что любая часть сферы, имеющая площадь, может быть заключена между двумя фигурами, состоящими из частей шаровых слоёв, причём разность площадей этих фигур может быть сколь угодно малой.

VII.19. Да. Полученные развёртки — два прямоугольника, одна из сторон которых есть образующая цилиндра, а другая сторона — длина дуги окружности основания. Сумма длин этих сторон даёт длину всей окружности основания, дальнейшее не вызывает затруднений.

Ответ единственный в том случае, если прямоугольники не равны (они обязаны иметь равную сторону — образующую цилиндра). Если же прямоугольники равны, то, не зная, какая именно их сторона является образующей, а какая — полуокружностью основания, получаем два ответа.

VII.20. Да, это верно (причём необязательно для выпуклого тела, достаточно, чтобы тело имело объём и площадь поверхности). Возьмём плоскость, делящую пополам объём тела (такая найдётся из соображений непрерывности), зафиксируем вектор нормали к этой плоскости и рассмотрим разность площадей частей поверхности (из площади части, находящейся в одном полупространстве с вектором нормали, отложенным от какой-либо точки плоскости, вычитаем площадь части, находящейся в другом полупространстве). Пусть теперь плоскость поворачивается вокруг некоторого направления так, чтобы она в любой момент делила объём пополам. Ясно, что разность площадей будет меняться непрерывно. Когда плоскость повернётся на 180°, разность площадей поменяет знак. Значит, в промежуточном положении она была равна нулю.

VII.21. 1) Разобьём ось абсцисс на вращающейся линии на маленькие отрезки Δx. Дугу линии на каждом из указанных отрезков заменим отрезком касательной (его длина будет $\sqrt{1 + (y')^2}\,\Delta x$). Площадь поверхности вращения этого кусочка примерно равна $2\pi y\sqrt{1 + (y')^2}\,\Delta x$. Затем применим процедуру интегрирования.

2) Эта формула получается из аналогичных рассуждений с той лишь разницей, что поверхность приближается цилиндрами, окружность основания которых в точке X имеет длину $C(X)$.

VII.22. Соображения точно такие же, как при доказательстве первой теоремы Паппа—Гюльдена (см. решение задачи **30.5**). Такое же доказательство предельным переходом от отрезка и ломаной к любой кривой.

VII.23. Разумно, видимо, воспользоваться предыдущей теоремой. Для этого из куска проволоки сделаем ту линию, вращением которой получена поверхность, а затем найдём центр масс этого куска проволоки (постаравшись закрепить на нитях так, чтобы он висел в горизонтальной плоскости). После этого воспользуемся теоремой Паппа—Гюльдена.

VII.24. Это расхождение объясняется тем, что карта (о которой говорится в задаче) была получена с использованием не меркаторовой проекции. При такой проекции области, лежащие возле полюса, увеличивают свои размеры по сравнению с областями, лежащими вблизи экватора (в том смысле, что квадрат единичной площади, лежащий вблизи полюса, проектируется в фигуру большей площади, нежели такой же квадрат на экваторе).

VII.25. Достаточно будет средней глубины Мирового океана и площади его поверхности, а также радиуса Земли. В этом случае объём воды в Мировом океане можно будет найти как объём соответствующей части пространства между двумя шарами.

VII.26. Предположим, что тара представляет собой кубик. Тогда при увеличении линейного размера в k раз площадь поверхности растёт в k^2 раз, а объём — в k^3 раз. Таким образом, на единицу объёма продукта приходится в k раз меньше площади упаковки. Итак, фасовка в крупную тару дешевле.

Такое же рассуждение подходит для тары любой формы.

VII.27. Примем, что время чистки пропорционально площади очищаемой поверхности, а также пренебрегаем тем, что картошка не занимает весь объём кастрюли. Тогда, как выяснено в предыдущей задаче, чем крупнее картошка, тем меньше площади на единицу объёма. Значит, крупную картошку чистить выгоднее.

План прохождения глав VI, VII

№ урока	Тема и её содержание	Повторение	Примечание
1	Простые фигуры, определение объёма, площадь плоской фигуры, их существование	Площади плоских фигур, в том числе криволинейной трапеции	
2, 3	Объём прямого цилиндра		
4	Представление объёма интегралом		
5	Упражнения, устная проверочная работа или работа самопроверки	Пространственные фигуры и тела	Работа в основном по теории или 4 ч семинара + 2 ч решения задач
6—11	Объёмы конкретных тел. Упражнения на выведение формул. Самостоятельная работа		
12	Контрольная работа		
13, 14	Понятие о длине кривой и площади поверхности. Описанные многогранники и площадь выпуклой поверхности	Объёмы (теория и решение задач)	
15—17	Площади поверхностей конкретных тел	Многогранники	

18, 19	Упражнения на пройденный по теме материал. Самостоятельная работа		
20, 21	Зачётная контрольная работа		
22, 23	Понятие о сферической геометрии	Соответствующий материал планиметрии	Лекционно: беседа учителя или доклады учеников

Задачи, контрольные работы, вопросы на понимание этой темы широко представлены как в учебнике, так и в методической литературе. Учитель, согласно своим предпочтениям, сам найдёт задачи для проведения всякого рода работ. Брать для таких работ материал из задач к главам нам представляется преждевременным, что не исключает использования этих задач для индивидуальных заданий ученикам. Приведём здесь примеры двух работ.

Из дидактического материала к главам VI, VII

Работа самопроверки (урок № 5)

1. Дать определение объёма простой фигуры.

2. На множестве пространственных простых фигур заданы две функции V_1 и V_2, принимающие только неотрицательные значения и обладающие свойствами: а) для равных фигур T_1 и T_2 $V_1(T_1) = V_1(T_2)$, $V_2(T_1) = V_2(T_2)$; б) если простая фигура T составлена из конечного числа простых фигур $T_1, T_2, \ldots, T_n$, то $V_1(T) = V_1(T_1) + V_1(T_2) + \ldots + V_1(T_\mathrm{n})$, $V_2(T) =$ $= V_2(T_1) + V_2(T_2) + \ldots + V_2(T_\mathrm{n})$. Как связаны эти функции? Ответ объяснить.

3. Пусть даны два прямых цилиндра C_1 и C_2 с данной высотой d, которые находятся по одну сторону от плоскости α и основания которых B_1 и B_2 не имеют общих внутренних точек и лежат на плоскости α, $B = B_1 \cup B_2$.

а) Почему прямой цилиндр C с основанием B и высотой d, расположенный по ту же сторону от α, совпадает с $C_1 \cup C_2$?

б) Почему $V(C) = V(C_1) + V(C_2)$?

4. Где в доказательстве теоремы о представлении объёма интегралом используется непрерывность функции $S(x)$ (площади сечения тела плоскостью, о которой говорится в теореме)?

5. Какая связь и какая разница между символами ΔV и $V(\Delta T)$, о которых говорится в доказательстве теоремы о представлении объёма интегралом?

Контрольная работа (урок № 12)

I в а р и а н т

1. Объём прямой четырёхугольной призмы равен V. Её диагональные сечения площадью S_1 и S_2 перпендикулярны. Найти высоту призмы.

2. Каркас какого многогранника получится, если соединить центры смежных граней правильного октаэдра? Какую часть объём этого многогранника составляет от объёма октаэдра?

3. В шар радиуса R вписан конус, образующая которого L. Найти объём конуса.

II в а р и а н т

1. Основание прямой призмы — трапеция с высотой h. Объём призмы V, а площадь сечения, проходящего через средние линии оснований, равна Q. Найти высоту призмы.

2. Каркас какого многогранника получится, если соединить центры смежных граней куба? Какую часть объём этого многогранника составляет от объёма куба?

3. В конус вписан шар. Найти объём сегмента шара, расположенного над плоскостью, содержащей окружность касания шара с боковой поверхностью конуса, если высота конуса h, а угол наклона образующей к плоскости основания φ.

ГЛАВА VIII. ВЕКТОРЫ И КООРДИНАТЫ

Содержание и изложение темы «Векторы» не имеют укоренившейся традиции в школьных учебниках. В них меняются и объём теории, и соотношения между доказываемыми и только формулируемыми фактами, и акцент при изложении на теорию или на решение задач с геометрическим содержанием с помощью этой теории. Даже определение вектора в школе, как известно учителю, было предметом дискуссии. Авторы данного учебника, не изменяя своих установок, начинают с обобщений физических фактов и лишь потом доказательно и последовательно излагают теорию, делая на ней акцент. Впервые для школьного учебника столь подробно, обоснованно, тактично, с обращением к опыту наглядного представления рассказывается о базисе и радиус-векторе.

Конечно, уровень задач не ниже, чем в других учебниках, но всё-таки главным авторы считают теорию, ибо с методами решения интересных задач с помощью векторов учащихся можно ознакомить, но чтобы научиться решать такие задачи, требуется значительно больше сил и времени, чем это предусмотрено программой.

Показательно, что многие интересные задачи по геометрии, решаемые с помощью векторов, вынесены в раздел «Задачи к главе VI», а среди геометрических задач к параграфам почти все привычного содержания. Однако важно отметить появление задач, требующих противоположного направления при их решении, где для ответа на вопрос о векторах надо мобилизовать пространственное представление, иметь развитое пространственное мышление.

В учебнике материал 8—9 классов о векторах излагается сокращённо (но тактично, с учётом забывания учащимися). Учитель сам принимает решение, ограничиваться этими сведениями или требовать знания более детального доказательства излагаемых сведений после тщательного повторения. (Материал для повторения полезно брать из учебников «Геометрия. 8 класс» и «Геометрия. 9 класс» тех же авторов для классов с углублённым изучением математики.)

Задачи к § 34

34.1. Учащиеся должны отдавать себе отчёт в том, что означает слово «равносильно» в решении этой задачи.

34.2. См. рис. 81.

34.3. См. рис. 82.

34.4. Аналогичную фигуру.

а) Сферу с центром O и радиусом $2|OX|$.

б) Гомотетия с центром в точке K и коэффициентом 2.

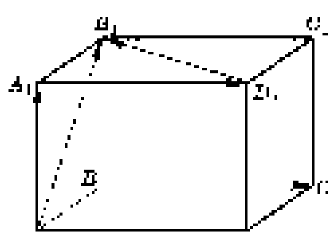

Рис. 81

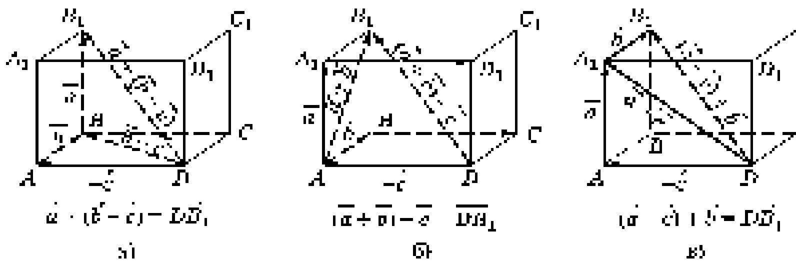

Рис. 82

34.6. Правильный многогранник с диагональю, в 2 раза большей, чем у исходного.

Задачи **34.7—34.10** представляют собой упражнения на вычисление скалярного произведения векторов исходя из его определения. Надо лишь обратить внимание учащихся на правильное нахождение угла между соответствующими векторами.

34.11. Используем свойства сложения векторов.

34.12. $(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{b}+\vec{c})+(\vec{a}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$. Левая часть этого равенства — вектор, параллельный данной плоскости, правая часть — вектор, коллинеарный $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$. Отсюда получаем необходимый вывод. (Заметим, кстати, что правую часть можно записать как $2\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ до определения умножения вектора на число, по смыслу коэффициента 2.) Результат не изменится, если вместо сумм взять алгебраические суммы.

34.13. а) Да. Например, правильный тетраэдр.

б) Да. Например, куб.

34.14. Ответ на все три вопроса: «Нет». Векторы можно задать указанным в задаче способом, однако ни одно из трёх требований задачи не выполняется.

34.15. Такая точка имеется и в тетраэдре — точка пересечения медиатрис. Но можно рассмотреть, например, правильный октаэдр. Доказательство единственности проводим так. Пусть есть две точки X и Y. Написав для них указанное равенство и произведя почленное вычитание, получим $\overrightarrow{XY}=\vec{0}$, т. е. $X=Y$.

34.16. Сравните с решением задачи **34.19.**

34.17. Можно конкретно построить такие ситуации: а) (рис. 83, *а*) здесь векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат в плоскости α, $\vec{c}\perp\alpha$; б) (рис. 83, *б*) здесь векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат в плоскости α, причём $\vec{a}\perp\vec{b}$ и $\vec{c}\perp\alpha$. Однако важнее заметить: из правила параллелепипеда следует, что $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$, $(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$,

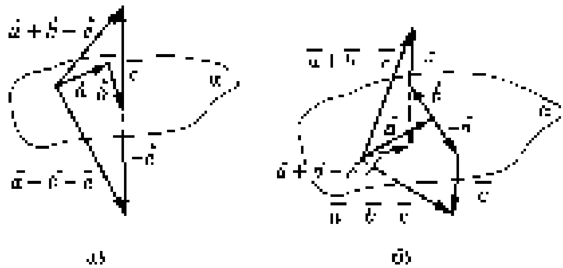

Рис. 83

$(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$ — это векторы, изображаемые диагоналями параллелепипеда, рёбра которого изображают векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

34.18. б) Имеются в виду, конечно, направленные отрезки. $\overrightarrow{LP} = \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AK}$. Тогда

$$\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NK} =$$
$$= (\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{AK}) + (\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{AQ}) + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}) =$$
$$= 2 \cdot (\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{BA}) \neq \vec{0}$$

(рис. 84). Более интересным представляется рассмотреть направленные отрезки $\overrightarrow{LP}$, $\overrightarrow{QM}$, $\overrightarrow{NK}$.

34.19. Одна из целей этой задачи — показать, что, вообще говоря, не существует правила, аналогичного «правилу многоугольника» на плоскости (такое «правило» уместно было бы назвать «правилом многогранника»). Действительно, рассмотрим треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$. Сумма шести векторов, задаваемых сторонами оснований, параллельна плоскости ABC, а сумма векторов, задаваемых боковыми рёбрами, не параллельна этой плоскости и равна $\vec{0}$. Значит, сумма всех девяти векторов никогда не равна $\vec{0}$. Поэтому ответ: «Не сможем».

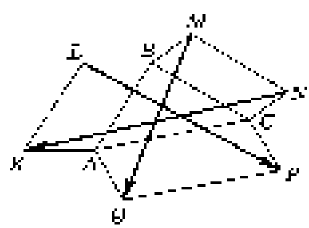

Рис. 84

Для учителя, обучающего учеников, имеющих предварительную сильную математическую подготовку, отметим связь рассматриваемой проблемы с понятием уникурсальной кривой (т. е. кривой, которую можно провести, не отрывая пера и проводя каждую линию ровно один раз). Действительно, спроектировав соответствующим образом каркас многогранника, мы получим некую самопересекающуюся линию, а воп-

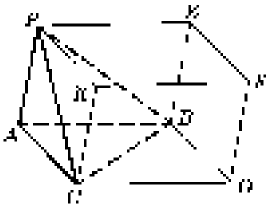

Рис. 85

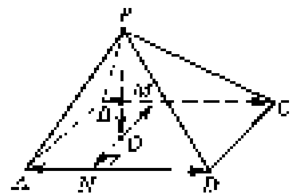

Рис. 86

рос, заданный в задаче, заменяется вопросом: «Уникурсальна ли эта линия?»

34.20. Имеются в виду направленные отрезки.

34.21. а) Прямая, параллельная (PA).

б) Плоскость, параллельная (APB) и проходящая через C.

в) Параллелепипед $ABDCPEFK$ (рис. 85).

Заметим, что пп. «а» и «б» полезны для пропедевтики понятия «радиус-вектор».

34.22. Учителю стоит обратить внимание учащихся на правильное нахождение угла между соответствующими векторами.

34.23. а) Да, верно, пусть точка O (рис. 86) — ортогональная проекция точки P на (ABC), $(MN) \perp (AD)$. Тогда $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{ND}$. Значит,

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO}^2 + \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{MC}, \quad \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PO}^2 + \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{ND},$$

$$\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{ND}.$$

б) Нет. Обратные утверждения неверны.

34.24. Да, можно. Из правила параллелепипеда следует, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}$ — это векторы, изображаемые диагоналями параллелепипеда, рёбра которого изображают векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

34.25. а) $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA} = 1$. О т в е т: плоскость $\alpha \perp \overrightarrow{ON}$, $|\overrightarrow{ON}| = \dfrac{1}{\overrightarrow{OA}}$, так как $|\overrightarrow{OX}| \cdot \cos\varphi = \dfrac{1}{|\overrightarrow{OA}|}$ (рис. 87).

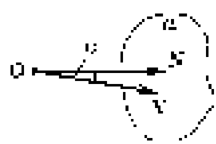

Рис. 87

б) Часть пространства, ограниченная двумя параллельными плоскостями (без границ).

в) Полупространство.

г) То же, что и в п. «б», но с границами.

34.26. а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(AD^2+BC^2-AC^2-BD^2)$, $\quad\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2-$

$-\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BD}^2)=\frac{1}{2}((\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BC}-BD)(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}))=$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{DC}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}))=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}))=$

$=\frac{1}{2}\,2\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}.$

б) Аналогично.

34.27. Это достаточно очевидное утверждение, связанное с решением вопроса о векторах с помощью геометрических соображений. Используется далее в задачах **35.2**, **35.54**.

Задачи к § 35

Как уже было отмечено выше, геометрические задачи, решаемые с помощью векторов, требуют для своего решения навыков «перевода» с языка геометрии на язык векторов и наоборот. Времени для окончательной отработки навыков такого рода программа не предоставляет.

Однако, возможно, учителю захочется дать некоторые из этих задач учащимся. Поэтому в качестве исключения наметим план их решения.

35.1. После решения этой задачи в учебнике предлагается схема решения подобных задач, требующих, однако, в каждом конкретном случае осмысленного подхода. Представляется, что для мотивации применения этой схемы следовало бы переформулировать задачу так, чтобы в ней не сообщалось заранее, в каком отношении делит отрезок указанная точка, а спрашивалось значение этого отношения (т. е. задача на доказательство стала бы задачей на вычисление). Иначе возможно более простое решение этой задачи: выражаются векторы, идущие из произвольной точки O пространства в точки, делящие отрезки в данном отношении, и выясняется, что все эти векторы равны.

35.2. Если $AB \parallel KLM$, то найдутся такие вещественные числа α и β, что $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{KL}+\beta\overrightarrow{KM}$ (следствие из теоремы о базисе). Наоборот, если $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{KL}+\beta\overrightarrow{KM}$ ($\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$), то $\overrightarrow{AB} \parallel KLM$.

35.3. а) Для $X \in \alpha$, и только для таких X, существуют вещественные числа α и β такие, что $\overrightarrow{CX}=\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}$. Но тогда для произвольной точки O пространства

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{OC}+\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}\overrightarrow{OC}+\alpha(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+\beta(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=$$
$$=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+(1-\alpha-\beta)\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}.$$

35.4. а) Пусть CC_1 — медиана треугольника ABC (рис. 88). По свойству медиан треугольника $\overrightarrow{TC_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CC_1}$. Применяя к векторам $\overrightarrow{TC_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ формулу вычитания векторов, получим $\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OC})$, отсюда $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC_1}$. Но $\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, тогда

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) =$$
$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

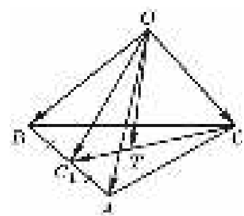

Рис. 88

б) Пусть точка X делит отрезок AA_1 в отношении 3 : 1, т. е. $\overrightarrow{XA} = 3\overrightarrow{A_1X}$ (рис. 89). По формуле вычитания векторов имеем $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OX} = 3(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA_1})$, где O — произвольная точка пространства, откуда $4\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OA_1}$. Но $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ (задача **35.4а**), поэтому $\overrightarrow{OX} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

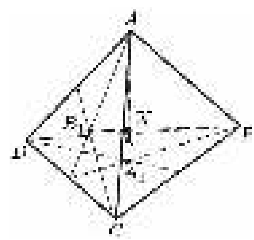

Рис. 89

Если Y делит отрезок BB_1 в отношении 3 : 1, то, рассуждая аналогично, найдём: $\overrightarrow{OY} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Такой же результат получится для точек Z и U, делящих CC_1 и DD_1 в отношении 3 : 1. Поэтому точки Z, Y, U совпадают с точкой X. Следовательно, X — общая точка всех четырёх отрезков, делящая каждый из них в одном и том же отношении 3 : 1.

Задачи **35.5—35.10** предполагают прежде всего геометрическое решение. Надо построить соответствующие направленные отрезки, рассказать, как и почему они будут так расположены.

Для задач **35.5** и **35.6** нужно повторить перпендикулярность в пространстве. Поэтому, возможно, сначала следует разобрать задачи **35.7** и **35.8,** а уже потом — **35.5**, **35.6**, **35.9**, **35.10**.

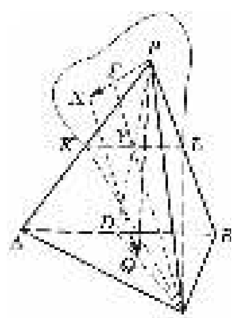

Рис. 90

35.5. г) Как неоднократно доказывалось ранее, $AC_1 \perp A_1BD$. Значит, разложение проводится по A_1BD и AC_1.

35.6. в) Проведём CY — биссектрису угла KCL (рис. 90), тогда основание перпендикуляра PF к CKL — точка $F \in CY$. Построим $QX \parallel CF$, причём $X \in PF$, тогда $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PX} + \overrightarrow{XQ}$.

д) Ситуация аналогичная.

35.7. д) В грани APC проведём $LF \parallel PC$ ($F \in AC$), тогда $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{LF} + \overrightarrow{FM}$.

35.8. е) Проведём $NN_1 \parallel AD$ ($N_1 \in AA_1$), $OO_1 \parallel AB$ ($O \in AA_1$), тогда $\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{NN_1} + \overrightarrow{N_1O} + \overrightarrow{OO_1}$. В частности, если $\dfrac{AO}{OB_1} = \dfrac{DN}{NA_1}$, то $O_1 = N_1$.

35.9. г) Проведём $FP \parallel AD$ ($F \in AA_1$), $QR \parallel AB$ ($R \in AA_1$), тогда $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PF} + \overrightarrow{FR} + \overrightarrow{RQ}$. (Частный случай: $F = R$, ср. с задачей **35.8г**).

35.10. а) Для повторения пройденного или предвосхищая задачу, можно отметить, что длины составляющих векторов составляют треть от длин соответствующих рёбер.

б) Проведём PT, где T — середина PC (рис. 91). В грани PCB проведём TS и $MF \parallel PC$ ($F \in CB$). Пусть $TC \cap MF = O$, тогда $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KT} + \overrightarrow{TO} + \overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OM}$. Можно заметить при этом, что $|TO| = \dfrac{1}{3}|BP|$, $|OM| = \dfrac{1}{6}|PC|$, $|KT| = \dfrac{1}{2}|AP|$. Выполнение задания 2 наводит учащихся на мысль, что теорема 35.2 верна для разности.

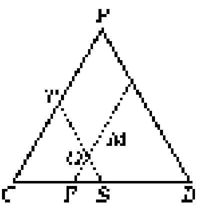

Рис. 91

35.11—35.13 — задачи на выведенные теоретические соотношения.

35.11. Пусть $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{d}$, $\vec{a} = (x_a;\ y_a;\ z_a)$; $\vec{b} = (x_b;\ y_b;\ z_b)$, $\vec{c} = (x_c;\ y_c;\ z_c)$, $\vec{d} = (x_d;\ y_d;\ z_d)$. Тогда $x_d = \alpha x_a + \beta x_b + \gamma x_c$. Аналогично для y_d и z_d.

35.12. $\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ компланарны. Тогда

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_c = \alpha x_a + \beta x_b, \\ y_c = \alpha y_a + \beta y_b, \\ z_c = \alpha z_b + \beta z_a. \end{cases}$$

35.13. Диагональ и рёбра параллелепипеда, выходящие из единой вершины.

35.14. а) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, где $\alpha = \angle(\vec{a};\ \vec{b})$; б) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Предварительно задаётся базис. Векторы раскладываются по базису.

35.15. Введите координаты с началом в A и осями AB, AC, AD.

35.16. Введите координаты с началом в A и осями AB, AC, AP. Результат не изменится.

35.19—35.22. Методика решения таких задач следует из двух важных случаев (см. пп. 35.1 и 35.5).

Покажем, например, решение задачи **35.22**.

Введём базис $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AP})$.

а) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$

Тогда $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AP},\ |KL|^2 = \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} -$

$- 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 2\,\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4},\ |\overrightarrow{KL}| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

б) $\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{AP},\ |PA| = 1,\ \overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}.$ Тогда

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{KL} = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4},\ \cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$

Откуда $\angle((KL);\ (PA)) = \arccos\frac{\sqrt{3}}{6}.$

35.23. Эту задачу полезно решить перед изучением п. 35.3 теории. Более того, может быть, её удобно рассмотреть перед задачей **35.51**.

Например, решим задачу «а».

а) $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow x\vec{a} = -y\vec{b}$, т. е. либо $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ либо $\begin{cases} x \neq 0, \\ \vec{a} = -\dfrac{y}{x}\vec{b}. \end{cases}$

Но последнего быть не может, так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис плоскости. Осталось $x = y = 0$.

б) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$, аналогично задаче «а», только теперь $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис.

35.24. а) Пусть центр сферы O. Тогда сфера — это множество точек M: $OM^2 = R^2$, где R, естественно, радиус сферы. Для выбранного полюса S уравнение приобретает вид:

$$(\overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SO})^2 = R^2. \tag{1}$$

Пусть, например, прямая задана двумя точками A и B. Тогда прямая — это множество точек M: $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AM}$, и уравнение прямой в итоге принимает вид:

$$\overrightarrow{SM} = (t+1)\overrightarrow{SA} - t\overrightarrow{SB}. \tag{2}$$

(Мы стараемся не упреждать п. 35.5.) Подставив равенство (2) в равенство (1) и учитывая, что $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SO}$ известны, получаем квадратное уравнение относительно t, в котором не может быть больше двух решений.

б) Проведём из центра O сферы перпендикуляр OM к (XY), тогда $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MX}$, $\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MY} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MX}$. И значит, $\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{AY} =$ $= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MX})(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MX}) = |\overrightarrow{AM}|^2 - |\overrightarrow{MX}|^2 = \text{const}$.

Естественно, что в этом месте можно поговорить о положении точки относительно окружности или, по крайней мере, заметить, что доказанное утверждение — стереометрическое обобщение двух теорем о произведении отрезков хорд, проходящих через точку внутри круга.

35.25. Уравнение сферы $OX^2 = R^2$, где O — центр сферы, R — её радиус. Обозначим точкой P проекцию O на плоскость α. Пусть $\overrightarrow{PA}$ и $\overrightarrow{PB}$ — два ортогональных единичных вектора в   . Тогда уравнение плоскости $\overrightarrow{PX} = \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB}$, а уравнение сферы можно записать так: $(\overrightarrow{PX} - \overrightarrow{PO})^2 = R^2$. В итоге $(\alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PO})^2 = R^2$.

Учитывая ортогональность векторов, получаем $\alpha^2 + \beta^2 = R^2 - |\overrightarrow{PO}|^2$, что и является основой для ответа.

35.26. а) Пусть a и b — скрещивающиеся прямые: $X \in a$, $A \in a$, $Y \in b$, $B \in b$, XY — общий перпендикуляр для a и b. Тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YB}$. Возводя в квадрат, получим, что $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{XY}|^2 = (\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY})^2$.

Отсюда видно, что $|AB|^2 \geqslant |XY|^2$; равенство наступает, когда $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} = \vec{0}$. Это может быть (учитывая, что a и b — скрещивающиеся прямые) лишь в том случае, когда $A = X$, $B = Y$.

б) Пусть по-прежнему a и b — скрещивающиеся прямые, $A \in a$, $B \in b$. Зададим единичные векторы: $\vec{a}$ — на a, $\vec{b}$ — на b. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ образуют базис пространства. Для любых точек M на a, N на b выполняется равенство $MN = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \vec{c}$. Очевидно, что доказательство возможности $MN \perp a$ и $MN \perp b$ равносильно существованию пары чисел (α, β), при которых $\overrightarrow{MN} \perp \vec{a}$ и $\overrightarrow{MN} \perp \vec{b}$. Домножив обе части векторного равенства на $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получаем систему уравнений $\begin{cases} \alpha + \beta\vec{a} \cdot \vec{b} = -\vec{c} \cdot \vec{a}, \\ \alpha\vec{a} \cdot \vec{b} + \beta = -\vec{c} \cdot \vec{b}, \end{cases}$ которая имеет решение. (Определитель этой системы $1 - \cos^2 \varphi$, где φ — угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причём $|\cos\varphi| \neq 1$, иначе $a \parallel b$. И т. д.)

35.27. Пусть $|PK| : |KA| = |PL| : |LB| = |CM| : |MA| = |CN| : |NB| = \dfrac{p}{q}$.

Если S — произвольная точка пространства, то

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{SL} - \overrightarrow{SK} = \frac{p}{p+q}\overrightarrow{SB} + \frac{q}{p+q}\overrightarrow{SP} - \left(\frac{p}{p+q}\overrightarrow{SA} + \frac{q}{p+q}\overrightarrow{SP}\right) =$$

$$= \frac{p}{p+q}(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) = \frac{p}{p+q}\overrightarrow{AB}.$$

Аналогично $\overrightarrow{MN} = \frac{p}{p+q}\overrightarrow{AB}$. Тогда $(KL)\,||\,(MN)$. Можно заметить, что ещё и $|KL| = |MN|$. Поэтому уместно ослабить условие задачи (или предложить учащимся убрать лишнее условие).

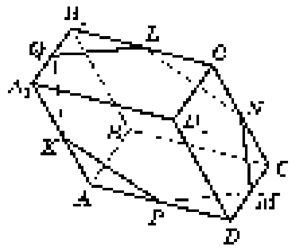

Рис. 92

35.28. Задача на векторный метод. Отрезки делятся в отношении 2 : 1. Решение аналогично решению задачи **35.4б**.

35.29. Задача на векторный метод.

35.32. а) Составим векторное уравнение (KLM) (рис. 92): $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AK} + m\overrightarrow{KL} + s\overrightarrow{KM}$.

Введём базис $(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. Тогда $\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}(m - s + 1)\overrightarrow{AA_1} +$

$+\left(m + \frac{1}{2}s\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{2}m + s\right)\overrightarrow{AD}$.

Уравнение (A_1B_1) таково: $\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AA_1} + \gamma\overrightarrow{AB}$. Имеем

$$X = Y \Leftrightarrow \frac{1}{2}(m - s + 1) = 1,\ m + \frac{1}{2}s = \gamma,\ \frac{1}{2}m + s = 0,$$

откуда $m = \frac{2}{3}$, $s = -\frac{1}{3}\gamma = \frac{1}{2}$.

б) Решение аналогично решению п. «а».

35.33. Необходимо задать базис и рассмотреть скалярное произведение векторов, лежащих на противоположных рёбрах.

35.34. Рассуждение можно провести аналогично рассуждениям в теореме о пересечении высот треугольника (векторное доказательство): обозначить точку пересечения высот тетраэдра $ABCD$ ($AA_1 \cup BB_1 = S$) и доказать с помощью векторов, что CS и DS перпендикулярны соответствующим граням. Доказательство же того, что AA_1 и BB_1 пересекаются, следует из определения высот тетраэдра и перпендикулярности AB и DC.

35.36. а) Ответ: если $xyz \neq 0$.

б) Если векторы не образуют базис, то существуют такие вещественные α и β, что $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) + \beta(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{c} + \vec{a}$, т. е. $(\alpha - 1)\vec{a} + (\beta + 1)\vec{b} =$

$= (1-\beta)\vec{c}$, но $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — базис. Тогда $\begin{cases} \alpha - 1 = 0, \\ \beta + 1 = 0, \\ 1 - \beta = 0. \end{cases}$ Система противоречива и т. д.

в) Аналогично предыдущему пункту.

35.41. Пп. «а», «б», «в» допускают общий приём решения. Введём полюс — точку пространства S и выразим векторы $\overrightarrow{XA}$, $\overrightarrow{XB}$, $\overrightarrow{XC}$, $\overrightarrow{XD}$ через $\overrightarrow{SX}$, $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SD}$. Подставив всё в данное равенство, получим уравнение относительно $\overrightarrow{SX}$. Оно и задаёт положение точки X, учитывая, что для выбранной точки векторы $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SD}$ заданы. Интересен вопрос о единственности. Учитывая, что три некомпланарных вектора образуют базис пространства, а в данной задаче точка O выражается через четыре вектора, можно предположить, что такая точка не является единственной. Это можно продемонстрировать, взяв, например, в качестве точки S в одном случае A, а в другом — B.

Обобщение очевидно: задача имеет решение при произвольных коэффициентах. В классе с достаточно сильной математической подготовкой можно заметить, что четыре соответствующих вектора образуют базис четырёхмерного пространства. Тогда указанные уравнения задают фигуру, играющую в четырёхмерном пространстве роль, аналогичную плоскости в трёхмерном пространстве (точнее ученикам сказать трудно).

35.42. Очевидно, чтобы задача стала содержательной, стоит оговорить, что хотя бы один из коэффициентов не равен нулю. Необходимо разобрать два случая: 1) один из коэффициентов — нуль; 2) ни один из коэффициентов не равен нулю. Разберём, например, второй случай: $\gamma = -\alpha - \beta$. Тогда первое равенство принимает вид: $\alpha(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + \beta(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = 0$.

Отсюда $\overrightarrow{CA} = -\dfrac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{CB}$. Поэтому точки A, B, C лежат на одной прямой.

35.43. Восстановить вершины тетраэдра (учитывая тематику параграфа) — значит указать некие конкретные векторы с конкретным началом изображающих их направленных отрезков. Наметим план решения хотя бы для задачи п. «б».

Если M_1 — центр масс грани ABC, то для точки S пространства $\overrightarrow{SM}_1 = 3\overrightarrow{SA} + 3\overrightarrow{SB} + 3\overrightarrow{SC}$. Составляя аналогичные равенства для остальных граней и учитывая, что векторы $\overrightarrow{SM}_1$, $\overrightarrow{SM}_2$, $\overrightarrow{SM}_3$, $\overrightarrow{SM}_4$ известны, получаем четыре уравнения с четырьмя неизвестными векторами. Их можно найти.

Отметим, что в п. «а» получаются шесть уравнений. Но, учитывая формулировку задачи, система совместна. Можно, конечно, и переформулировать задачу: «Найти вершины пирамиды, середины рёбер которой — заданные точки». В таком случае задача нуждается в дополнительном исследовании.

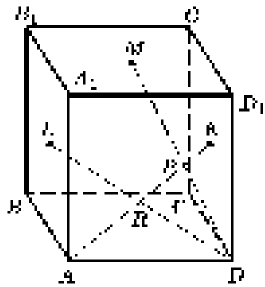

Рис. 93

35.44. Введём базис $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AD})$ (рис. 93). P — предполагаемая точка пересечения AK и MD. Пусть $|MP| : |PD| = p : q$. Тогда

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\lambda\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\lambda\overrightarrow{AA_1} + \lambda\overrightarrow{AD}.$$

С другой стороны,

$$\overrightarrow{AP} = \frac{p}{p+q}\overrightarrow{AM} = \ldots = \frac{q}{2(p+q)}\overrightarrow{AB} + \frac{q}{p+q}\overrightarrow{AA_1} + \frac{2p+q}{p+q}\overrightarrow{AD}.$$

Решая систему $\begin{cases} \dfrac{q}{2(p+q)} = \dfrac{1}{2}\lambda, \\ \dfrac{q}{p+q} = \dfrac{1}{2}\lambda, \\ \dfrac{2p+q}{p+q} = \lambda, \end{cases}$ получаем противоречие. Общих точек у этих отрезков нет. Перебрав остальные варианты, получаем, что пересекаются AK и DL. (Конечно, геометрически это более очевидно, но задачу предлагается решать с помощью векторов.) Это же замечание относится и к последующим задачам.

35.45. Зададим векторы: на прямой a — вектор $\vec{a}$, на прямой b — вектор $\vec{b}$. Тогда ненулевой вектор $\vec{c}$ на прямой c можно выразить так: $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Пусть вектор $\vec{x}$ задан на прямой x. Имеем $\vec{x}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha\vec{x}\vec{a} + \beta\vec{y}\vec{b}$.

Если обозначим интересующий нас угол , то последнее равенство принимает вид $|\vec{x}|\,|\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}|\cos\varphi = |\vec{x}|\,|\alpha\vec{a}|\cdot\cos\varphi$, что допускается в двух случаях: $\cos\varphi = 0$ или $|\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}| = |\alpha\vec{a}| + |\beta\vec{b}|$. Однако последнего быть не может. Поэтому $\varphi = 90°$. Отсюда следует ещё один признак перпендикулярности прямой и плоскости.

35.47. Ответ: $\vec{0}$. Возьмём точку O — центроид правильного тетраэдра $PABC$. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP} = \vec{0}$.

35.48. Пусть это ломаная $ABCD$, тогда $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$. Возводим обе части последнего равенства в квадрат и т. д.

35.49. Пусть $\angle ca = \angle LKA = \alpha$, $\angle cb = \angle BLK = \beta$.

Рассмотрим прямоугольные треугольники AKL и BKL (рис. 94):

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{|AL|}{|BK|};\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{|KB|}{|BL|};\quad |AL| = \sqrt{|AB|^2+|BL|^2};$$

$$|KB| = \sqrt{|AB|^2+|AK|^2};\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{|AB|^2+|BL|^2}}{|AK|};$$

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\sqrt{|AB|^2+|AK|^2}}{|BL|};\quad \operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow |AK|=|BL|.$$

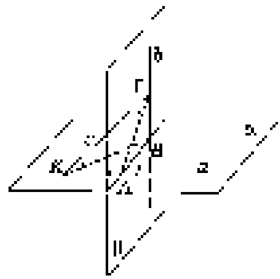

Рис. 94

35.50. а) Обозначим $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DX}$. Возведём обе части в квадрат:

$$\overrightarrow{DX}^2=\overrightarrow{DA}^2+\overrightarrow{DB}^2+\overrightarrow{DC}^2+2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}+2\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}>0.$$

Из теоремы косинусов $2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}^2+\overrightarrow{DB}^2-\overrightarrow{AB}^2$, $2\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=$ $=\overrightarrow{DB}^2+\overrightarrow{DC}^2-\overrightarrow{BC}^2$, $2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}^2+\overrightarrow{DC}^2-\overrightarrow{AC}^2$.

Подставив эти выражения вместо удвоенных произведений в последнее неравенство, выводим искомое неравенство.

б) Решение аналогично решению п. «а». Только взять $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$.

в) Взять $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$, где O — центр описанной сферы.

35.51. а) Существуют такие вещественные α и β, что $\overrightarrow{AX}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$.

б) Один из вариантов о т в е т а: не существует такой точки O, что $\overrightarrow{OA}=\alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{KO}=\beta\overrightarrow{KL}+\gamma\overrightarrow{KM}$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{R}$.

Другой вариант о т в е т а: не существует пары вещественных чисел $(\alpha; \beta)$, таких, что $\alpha\overrightarrow{KL}+\beta\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{AB}$.

в) Так как это утверждение равносильно тому, что (AB) пересекает (BCD), то легко видеть связь с задачей **35.3б**.

Вот два примера о т в е т а:

1. Не существует пары вещественных чисел (;), таких, что $\overrightarrow{CB}=\ \overrightarrow{CA}+\ \overrightarrow{CD}$.

2. $\alpha\overrightarrow{CB}=\alpha\overrightarrow{CA}+\gamma\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\alpha=\beta=\gamma=0$.

35.54. Доказывается от противного.

35.55. Хотелось бы повторить, что практически все задачи этого раздела решаются не сложнее чисто геометрических. Решение задач с помощью векторов имеют в данном случае то преимущество, что позволяют использовать единый подход к такого рода задачам.

§ 36. Векторное умножение векторов

Этот параграф предназначен лишь для ознакомительного, необязательного рассмотрения. Авторы учебника знакомят учащихся с векторным произведением лишь для понимания математического аппарата, необходимого в физике. В школьном курсе геометрии этот материал больше не используется.

§ 37. Координаты

1. Практически бóльшая часть параграфа, да и всей главы, — это повторение, обобщение, уточнение соответствующего материала из 7—9 классов. Поэтому можно уменьшить число уроков на эту тему за счёт повторения (если его можно организовать в классе).

2. Пп. 37.8, 37.9 хороши для индивидуальных сообщений учащихся. Упражнений по ним в учебнике нет, а в теории учащиеся могут разобраться самостоятельно.

3. В п. 37.1 даётся ещё один наглядно ясный способ нахождения координат точки. Но этот способ можно обосновать (теорема 11.1). Такое обоснование в качестве повторения ортогонального проектирования (которое здесь очень кстати) можно предложить сделать ученику. Кроме этого полезно, наверное, построив проекции точки M на координатные плоскости и оси, обратить внимание на образовавшийся параллелепипед (как подготовка к п. 37.2).

4. Ясно, что первое предложение п. 37.4 неочевидно и комментируется всем остальным текстом пункта. Поэтому учителю уместно ещё раз сформулировать это предложение в конце работы с этим пунктом.

Задачи к § 37

37.1. Практически это задача-теорема. Числовые данные не мешают обобщить оба способа.

37.2. Решается аналогично такой же задаче в планиметрии. Полезно повторить соответствующие векторные соотношения.

37.3. Полупространством без границы.

37.5. Имеется в виду «в пространстве».

37.8. а) На координатной плоскости, исключая оси координат.

б) На координатных осях, исключая их пересечение.

37.9. а) (2; 0; –3); (0; –1; –3); (2; –1; 0);

б) (2; 0; 0); (0; –1; 0); (0; 0; –3).

37.10. а) Можно наглядно представить и увидеть, что сечение фигуры плоскостью, параллельной (XOY), — окружность, а сечение фигуры плоскостью, проходящей через (OZ), — парабола, и дать ответ. Однако можно сделать аналитические выкладки:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ z^2 + z = 9. \end{cases}$$

Найдя отсюда z, нетрудно убедиться, что искомая фигура — пересечение сферы и плоскости — окружность.

37.11, 37.12. Прямая понимается в этом случае как пересечение двух плоскостей.

37.13. Сначала полезно наглядно представить, а потом, решив систему алгебраических уравнений, проверить правильность этого представления. Важно учесть при наглядном представлении замечание из п. 37.5.

37.16. д) Станем искать уравнение плоскости в виде $Ax + By + Cz + D = 0$ ($\vec{n}_2 = (A, B, C)$). Так как $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, то $A - B + C = 0$. Это уравнение имеет неопределённое решение. Пусть, например, $A = C = 1$, тогда $B = 2$; D от A, B, C не зависит, тогда уравнение искомой плоскости, например, $x + 2y + z - 1 = 0$.

37.21. Провести аналогию с окружностью. Для полного впечатления о вариантах решения полезно дополнить вопрос словом «шара» и поменять знаки на $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$ 0. Более того, с этой же целью в п. «г» полезно предложить справа $x - 1$.

37.22. Естественно, полезно повторить взаимное положение окружностей на плоскости и дополнить набор вопросов пунктом, когда $|O_1O_2| < |R_1 - R_2|$ (где O_1 и O_2 — центры сфер, а R_1 и R_2 — их радиусы).

37.23. б) Формулировка вопроса допускает два толкования: 1) если имеется в виду «только одной плоскости», то решений нет; 2) если «хотя бы одной», то на самом деле всех трёх.

г) Из наглядных соображений ясно, что таких сфер бесконечно много. Пусть центр сферы $S(x_0, y_0, z_0)$ и сфера касается (XOY), тогда уравнение сферы $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)_2 = z_0^2$, а M (2; –3; 1) лежит на сфере $(2 - x_0)^2 + (3 + y_0)^2 + (1 - z_0)^2 = z_0^2$.

Зададим, например, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 13{,}5$. Тогда уравнение сферы $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 13{,}5)^2 = 13{,}5^2$.

37.28. $\begin{cases} a = b = c, \\ d^2 + e^2 + f^2 + 4ag > 0. \end{cases}$ Эту систему получаем, зная, что $(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - k)^2 = R^2$ — уравнение сферы с центром в точке $(m; n; k)$ и радиусом R. Раскрываем скобки и приравниваем коэффициенты.

37.29. Нормальный вектор данной плоскости $\vec{n} = (1; 1; 1)$ равнонаклонён к осям. Найдём координаты вектора длиной 1, коллинеарного $\vec{n}$. Все три его координаты равны $\cos\alpha$, где α — угол наклона $\vec{n}$ к осям. Тогда $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\cos\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Значит, искомая плоскость получается из данной параллельным переносом на вектор $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ или на вектор $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (что соответствует геометрическому смыслу задачи).

37.30. Предварительно для развития пространственного мышления учеников полезно предложить представить себе такую плоскость и описать её положение в пространстве словами. Затем формально вывести уравнение, составив его на основании равенства квадратов соответствующих расстояний.

37.37. Сначала найдём координаты вершины C (0; b; 0), решим систему уравнений $|AC| = |AB|$, $|BC| = |AB|$. Затем найдём точку D (x; y; z), решив систему уравнений $|AD| = |AB|$, $|BD| = |AB|$, $|CD| = |AB|$.

37.38. а) Найдём расстояние от точки O(0; 0; 0).

б), в) Спроецируем эти точки на координатные оси и плоскости и найдём расстояние от них до этих проекций.

37.39. Подставим координаты точек в уравнение сферы $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ и решим систему уравнений.

37.40. Задачи (как было отмечено и в случае векторов) рассчитаны на геометрическое представление учащихся.

ж) Проведём плоскость, перпендикулярную (OX), через эту точку. Очевидно, сечение сферы этой плоскостью — большая окружность (рис. 95). Точка сферы, ближайшая к точке M (2; 2; 2), является и ближайшей к M точкой полученной большой окружности.

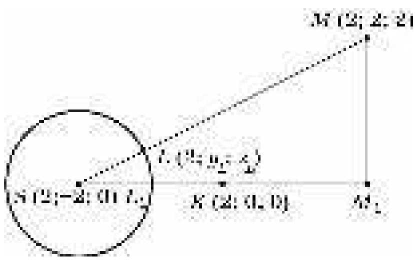

Рис. 95

Из условия следует:

$$|SM_1| = 4,\ |MM_1| = 2 \text{ (где } M_1 = \text{пр}_{(XOY)}M),$$

$$|SM| = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}.$$

Из подобия треугольников

$$\frac{|LL_1|}{|MM_1|} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \Rightarrow |LL_1| = \frac{1}{\sqrt{5}} = z_L,\ \frac{|SL_1|}{4} = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Тогда $\left|SL_1\right| = \frac{2}{\sqrt{5}}$, а $\left|L_1K\right| = 2 - \frac{2}{\sqrt{5}}$. Значит, $y_L = \frac{2}{\sqrt{5}} - 2$ и т. д.

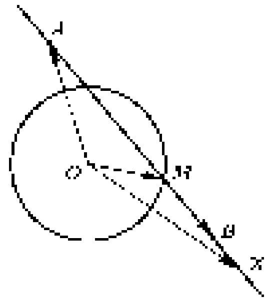

Рис. 96

37.45. а) Это сумма расстояний от точки $(x; y; z)$ до $(1; 0; 0)$ и $(0; 1; 0)$.

$a = 1$ — нет решений; $a = \sqrt{2}$ — единственное решение; $a = 2$ — бесконечно много решений.

б) Решение для $(x; y; z)$ и $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(0; 0; 1)$ и ответы аналогичны решению и ответу п. «а».

37.46. Зададим прямую AB: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$, где $t \in \boldsymbol{R}$. Найдём пересечение прямой AB и сферы (рис. 96). Пусть это точка $M\,(x_m; y_m; z_m)$; координаты $\overrightarrow{AB} = (m; n; k)$. Тогда $x_m = x_A + tm$, $y_m = y_A + tn$, $z_m = z_A + tk$. Подставляем координаты точки M в уравнение сферы. Получаем уравнение относительно t. Если уравнение имеет два решения, то прямая пересекает сферу, если одно — касается её. А если нет решений, то у прямой и сферы нет общих точек.

37.47. а) Для решения необходимо узнать расстояние между центрами сфер. Оно не должно превышать двух радиусов. Ответ: система не имеет решения.

б) Напоминает задачу **37.45**. Ответ: $|a| = \sqrt{2}$ — одно решение; $|a| > \sqrt{2}$ — нет решений; $0 < |a| < \sqrt{2}$ — бесконечно много решений.

37.48. Для этого найдём угол между векторами нормалей этих плоскостей.

37.49. Задачи эти не предполагают требования предварительно знать, какой вид у фигуры F. А вот рассказать, какая линия получается в сечении после замены x или y их соответствующими значениями, должен каждый. Более того, обобщив задачи для $x = x_0$, $x \in \boldsymbol{R}$, можно и поговорить о том, как выглядит фигура F.

37.50. Лучше отдельно рассмотреть случаи, когда равен нулю свободный член уравнения и когда обращается в нуль один из коэффициентов при переменных x, y, z.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ VIII

VIII.3. Плоскость $2x + 3y - 5z + 10 = 0$ пересекает оси x, y и z в точках $(-5; 0; 0)$, $\left(0; \frac{-10}{3}; 0\right)$ и $(0; 0; 2)$ соответственно. Вершина куба с координатами $(-a; -a; a)$ принадлежит плоскости (a — длина ребра куба).

Подставляем координаты вершины в уравнение $2x + 3y - 5z + 10 = 0$ и получаем $a = 1$.

VIII.4. $V = \int_0^1 s(y)\,dy = \int_0^1 \sqrt{1 - y^2}\, y dy = \frac{1}{3}.$

VIII.5. а) Это часть цилиндра. $V = \int_0^1 2\sqrt{1 - x^2}\, x dx = \frac{2}{3}.$

б) Объединение восьми фигур из п. «а». Значит, $V = 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}.$

в) $V = \frac{16}{15}.$

VIII.6. $V = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$

VIII.7. Пусть точка X принадлежит BD, а точка Y — отрезку PC. x — расстояние от B до X. y — расстояние от C до Y. O — точка пересечения диагоналей основания. Зададим базис: $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Точка N лежит на медиане PM треугольника APD, и $\overrightarrow{ON} \perp (APD)$. Разложим $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{XY}$ по базису. Из системы $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{XY} = 0$ и $\left|\overrightarrow{XY}\right| = \sqrt{\overrightarrow{XY}^2}$ находим множество значений функции.

VIII.9. Зададим базис: $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BB_1} = \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Если $KL \parallel BD_1$, то $n\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{BD_1}$, т. е. векторы коллинеарны. $\overrightarrow{BD_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1L}$; $\overrightarrow{KC} = x\overrightarrow{AC} = x(\vec{c} - \vec{a})$; $y\overrightarrow{C_1D} = \overrightarrow{C_1L}$. Тогда $\overrightarrow{KL} = x\vec{c} + (1 - x)\vec{a} + (1 - y)\vec{b}$. Запишем условие коллинеарности $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{KL}$:

$\begin{cases} nx = 1, \\ n(1 - x) = 1, \\ n(1 - y) = 1. \end{cases}$ Решив систему, получаем $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

VIII.12. Зададим ортонормированный базис. Представим отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер, как векторы. Разложим эти векторы по заданному базису. Далее воспользуемся формулой $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

VIII.13. Пересечение двух плоскостей — это прямая. Рассмотрим проекции отрезка с концами в точках $(x_1; y_1; z_1)$ и $(x_2; y_2; z_2)$ на оси координат. Точка $(x; y; z)$ принадлежит линии пересечения плоскостей. Тогда

$$\overrightarrow{MX} = \frac{p}{p + q}\overrightarrow{MX_1} + \frac{q}{p + q}\overrightarrow{MX_2},$$

следовательно, $x = px_1 + qx_2$. Аналогично рассматриваем проекции на оси y и z (рис. 97).

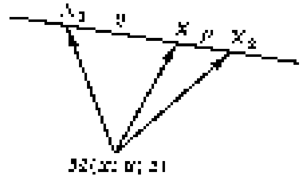

Рис. 97

VIII.16. а) Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарные. Тогда четырёхугольник, составленный из этих векторов, — ромб.

Если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ некомпланарные, то ромб можно «согнуть» по диагонали. Далее доказательство видно из рисунка 98. Возможен случай, как в задаче **VIII.28**. Эту задачу лучше решать после задачи **VIII.29**.

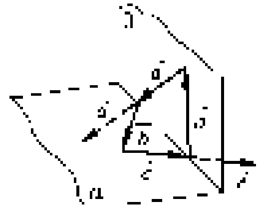

Рис. 98

VIII.17. Если $k = 1$, то плоскость перпендикулярна отрезку AB и проходит через его середину.

При $k > 0$ и k 1 это окружность, перпендикулярная AB.

Доказательство можно провести, записав уравнение $\frac{XA}{XB} = k$ через координаты точек A, B и X. Пусть $A\,(a;\ 0)$, $B\,(b;\ 0)$, $X\,(x;\ y)$, тогда $\frac{\sqrt{(a - x)^2 + y^2}}{\sqrt{(x - b)^2 + y^2}} = k$. Отсюда получаем уравнение окружности:

$$\left(x + \frac{a - bk^2}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{k^2b^2 - a^2}{k^2 - 1} + \left(\frac{a - bk^2}{k^2 - 1^2}\right)^2.$$

VIII.18. а) Четверть пространства, ограниченного координатными плоскостями, взятая без этих плоскостей.

б) Призма.

VIII.19. Найти координаты остальных вершин правильного многогранника по координатам вершин одной грани однозначно нельзя. Существуют два варианта решения.

VIII.20. $R = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. По формуле расстояний от точки $M\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, получаем $\rho = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

VIII.21. Расстояние найти можно. Существуют два варианта решения. Задаём базис $(\vec{r}_1;\ \vec{r}_2;\ \vec{r}_3)$, где $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ — радиус-векторы с началом в данной точке и концами в трёх вершинах. В этом базисе выражаем $\vec{r}_4$, где $\vec{r}_4$ — радиус-вектор четвёртой вершины, а затем находим само расстояние $\left|\vec{r}_4\right| = \sqrt{\vec{r}_4^{\,2}}$. Предварительно выражаем косинусы углов между векторами (через теорему косинусов).

VIII.22. Находим длину ребра и расстояние от данной точки до двух вершин грани. Далее задаём вектор, выходящий из вершины к данной точке в базисе $(\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c})$, где $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ — векторы, выходящие из одной вершины.

VIII.27. Сумма всех составляющих этого вектора на этих прямых равна самому вектору.

VIII.28. а) Надо представить правильный тетраэдр, вписанный в сферу. Радиусы, проведённые к вершинам, есть данные четыре вектора. Далее легко доказать, что сумма векторов равна $\vec{0}$.

б) Находим радиус сферы через сторону тетраэдра. По теореме косинусов находим угол между векторами. Он равен $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

VIII.30. Пусть $x + y + z = a$ — плоскость , пересекающая оси координат в точках $(a;\ 0;\ 0)$, $(0;\ a;\ 0)$, $(0;\ 0;\ a)$, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ — сфера радиуса R и с центром в $(0;\ 0;\ 0)$. Расстояние от $(0;\ 0;\ 0)$ до плоскости α равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (третьей части диагонали куба с ребром, равным a). $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — это расстояние от любой точки плоскости α до $(0;\ 0;\ 0)$. Наименьшее расстояние равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Следовательно, $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{a^2}{2}$. Можно усилить неравенство $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$.

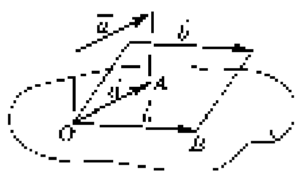

Рис. 99

VIII.31. Отложим от какой-либо точки O данные векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (рис. 99). Направленные отрезки OA и OB лежат в одной плоскости.

ГЛАВА IX. ДВИЖЕНИЯ

Прежде всего сформулируем цель главы: дать теорию движений (перемещений) и закрепить её на целесообразных примерах. Авторы не стремятся научить школьников решать задачи с помощью движений (хотя элементы такого подхода встречаются в упражнениях), а лишь систематически, на уровне заданной строгости излагают круг вопросов теории движений. В соответствии с этим и цели задач (как в главе, посвящённой векторам и координатам) — не столько показать приложение движений, сколько в теории движений использовать выработанный багаж геометрических знаний.

Теория этой главы — некое обобщение соответствующих разделов геометрии 8—9 классов (см. учебники этих же авторов для 8 и 9 классов). Поэтому, комментируя её, ограничимся лишь некоторыми общими соображениями, не останавливаясь на разборе изложения отдельных видов движений. Да и задачи этой главы по причинам, изложенным выше, не нуждаются в столь подробном разборе, как задачи предыдущих глав.

§ 38. Общие свойства движений

Пункт 38.1 впечатляет своей систематичностью, повторяет и дополняет термины, введённые в алгебре (да и в геометрии) 7—9 классов. Общий функциональный подход показывает ученикам некоторые математические понятия, общие для разных школьных учебных предметов, и потому есть предлог для разговора об аналогии, сравнении, обобщении в математике. Для учителя это удобно в конце учебного года, ибо повторяет и систематизирует материал алгебры и геометрии.

При рассмотрении понятия «отображение» очень важно, чтобы учащиеся понимали, что оно содержит три компонента: *фигуру*, которая отображается; *множество*, куда отображается данная фигура; *правило*, по которому каждой точке этой фигуры ставится в соответствие её образ. Для более глубокого усвоения понятия «отображение» полезно, на наш взгляд, привести примеры различных отображений одного и того же множества, при которых получаются: а) разные образы; б) одинаковые образы, но разными способами.

Например: а) при ортогональном проектировании окружности на разные плоскости можно получить окружность, эллипс или отрезок; б) два равных круга можно отобразить друг на друга различными способами — параллельным переносом, центральной, осевой или зеркальной симметрией и т. п.

В пункте 38.2 опять есть моменты систематизации и обобщения, но важно обратить внимание учеников на фразу: «Движения в геометрическом смысле бывают двух видов: одним из них соответствуют реальные перемещения (движения) тел, а другим — нет». Эта фраза —

повод для разговора о сходстве и различиях в физике и математике, продолженного в пункте 38.3.

Пункт «Общие свойства движений» — обобщение свойств движений плоскости.

В пункте о распространении движения на пространство в теореме 38.1 не говорится о единственности такого распространения. Пусть, например, $a \perp l$, $a \cap l = M$, тогда прямая может быть образом самой себя при соответствующих центральной, осевой и зеркальной симметриях и все эти три движения могут быть обобщены (распространены) на пространство. Теоретический материал всего этого параграфа изложен так, что даёт учителю большие возможности для организации самостоятельной работы учащихся. Здесь более чем где-либо имеется возможность предложить ученику найти места в тексте, которые нуждаются в обоснованиях, сформулировать соответствующие утверждения и доказать их.

Такую работу мы считаем вообще очень полезной в этом месте и вполне доступной для учащихся.

Исключением является, конечно, теорема о распространении движения на пространство, но она доказана в учебнике позднее.

Задачи к § 38

При обсуждении задач **38.4**, **38.7**, **38.14** полезно рассмотреть вопрос, что такое образ вектора при движении. Ведь по определению движение отображает точки пространства в точки пространства, а вектор совокупностью точек не является. Поэтому целесообразно обсудить вопрос о том, почему можно корректно определить образ вектора при движении (см. задачу **38.12**). Особого внимания заслуживают задачи **38.13—38.15**. В них возможны два подхода к решению: 1) угадать известные отображения или описать в геометрических терминах отображения, данные в задаче; 2) исследовать их чисто алгебраически. Пример такого исследования приведён в решении задачи **38.13н**.

Кроме того, дополнительное задание в задаче **38.13** даёт простор для постановки дополнительных вопросов. Например: как изменяются форма и размеры полученного образа в зависимости от положения исходного куба? В каких границах лежат различные величины у образов куба? Что будет происходить с другими многогранниками при этих отображениях?

38.1. а) Выпуклый многоугольник является пересечением полупространств, ограничиваемых плоскостями его граней. Поскольку полупространство при движении переходит в полупространство (так как плоскость переходит в плоскость, а полупространство определяется как множество точек, для любой пары которых отрезок, их соединяющий, не пересечёт плоскость границы), пересечение полупространств перейдёт в пересечение полупространств. При этом так как многогранник — ограниченная фигура, то он и перейдёт в ограниченную фигуру (все точки многогранника находятся на ограниченном расстоянии от некоторой точки пространства, поэтому все точки образа будут находиться на ограниченном расстоянии от образа указанной точки).

б) Замкнутая область — область, содержащая все свои граничные точки. Поскольку граничная точка определяется на языке кругов (каждый круг с центром в данной точке содержит и точки области, и точки, не лежащие в области), а круг определяется на языке расстояний, то образы граничных точек являются граничными точками образа. При этом внутренние точки остаются внутренними, а внешние — внешними. Поэтому образ замкнутой области будет содержать все свои граничные точки и являться областью.

в) Тело (см.: «Геометрия. 10 класс», с. 215) — это множество точек пространства: 1) с непустой внутренностью, любые две точки которой можно соединить ломаной, состоящей из внутренних точек; 2) содержащее все свои граничные точки. Поскольку определение внутренних и граничных точек даётся на языке шаров, которые, в свою очередь, определяются на языке расстояний, тело переходит в тело.

38.2. а) Шар есть геометрическое место точек, удалённых от центра не более чем на радиус. Тогда образы этих точек будут удалены от образа центра не более чем на радиус, т. е. будут лежать в шаре. Осталось заметить, что все точки, лежащие в шаре-образе, будут образами точек исходного шара (достаточно использовать обратное движение).

Решение остальных пунктов аналогично решению п. «а».

38.3. а) Да. Достаточно совместить центры куба и параллелепипеда. Искомое отображение будет центральной проекцией.

б) Да. Достаточно взять центральную проекцию из общего центра сферы и куба.

в) Да. С помощью центральной проекции отобразим поверхность правильной треугольной пирамиды на сферу, а затем со сферы — на правильную четырёхугольную пирамиду.

г) Да. Это стереографическая проекция. Рассмотрим выколотую точку и будем проектировать с центром в этой точке сферу на плоскость, касательную к сфере в точке, диаметрально противоположной выколотой.

38.4. Образ $\vec{k}$ должен быть перпендикулярен образам $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Поэтому $f(\vec{k}) = \vec{k}$ или $f(\vec{k}) = -\vec{k}$. Первый случай реализуется при симметрии относительно плоскости, делящей пополам угол между $\vec{i}$ и $\vec{j}$, а второй — при осевой симметрии относительно биссектрисы угла между $\vec{i}$ и $\vec{j}$ (подразумевается, что все векторы отложены от одной фиксированной точки).

38.5. Во всех трёх пунктах ответ отрицательный. Общим контрпримером может служить инверсия в пространстве относительно некоторой сферы (см. также задачу **38.16**). При этом указанная сфера остаётся неподвижной, а ортогональные ей сферы переходят в себя.

38.6. Рассмотрим две прямые, лежащие в данной плоскости, образы этих двух прямых и плоскость, проходящую через них. Докажем, что она будет образом исходной плоскости. Для этого возьмём произвольную точку исходной плоскости, проведём прямую через эту точку так, чтобы она пересекала две исходные прямые. Тогда образ этой прямой будет лежать в построенной плоскости. Мы доказали, что образы всех точек плоскости лежат в некоторой плоскости. Чтобы доказать, что они покрывают её всю, построим для каждой точки прообраз. Заметим, что обратное отображение переводит прямые в прямые, поэтому прообраз полученной плоскости будет лежать в исходной плоскости.

Обратное утверждение верно, ибо каждая прямая получается как пересечение двух плоскостей.

38.7. а) Для доказательства достаточно показать, что для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ любого вещественного числа α выполнено: 1) $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$; 2) $f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$. Второе утверждение очевидно, так как длины векторов в обеих частях равенства равны и направления совпадают (для выяснения этого надо перебрать знаки α). Первое же утверждение следует из того, что образ суммы последовательно отложенных векторов соединяет начало образа первого и конец образа второго векторов. То же происходит с суммой образов.

б) Это утверждение следует из того, что при движении сохраняются как длины векторов, так и угол между ними.

38.8. Положение точки на прямой однозначно определяется её расстояниями до двух данных точек. Поэтому если две точки прямой переходят в себя, то вся прямая переходит в себя (так как при движении прямая перейдёт в прямую). При этом расстояния от любой точки прямой до неподвижных точек остаются теми же, а значит, любая точка прямой остаётся неподвижной. Таким образом, если у движения есть две неподвижные точки, то имеется и неподвижная прямая, проходящая через эти точки. Тогда ровно двух неподвижных точек у движения быть не может.

38.9. а) У движения есть неподвижная прямая, проходящая через две из этих точек, и неподвижная третья точка. Значит, неподвижны все прямые, проходящие через данную точку и точки прямой. Эти прямые заполняют всю плоскость, кроме прямой, параллельной взятой неподвижной и проходящей через неподвижную точку. Повторив рассуждение для других пар вершин, задающих неподвижную точку, получаем, что вся плоскость окажется неподвижной.

Возможен был и вариант доказательства с помощью разложения любого вектора плоскости по базису векторов с общим неподвижным началом и концами в двух других неподвижных точках. Тогда любой вектор плоскости остаётся неподвижным в силу утверждения задачи **38.7**, а значит, остаётся неподвижным его конец, если вектор был отложен от неподвижной точки.

б) Нет. Даже если имеются две неподвижные точки, то неподвижной является вся прямая.

38.10. Неподвижным останется центр шара. Действительно, центр является единственной точкой, равноудалённой от всех точек граничной сферы.

38.11. Два тела равны, если одно является образом другого при некотором движении. Переведём движением центр одного шара в центр другого. Тогда при этом движении сами шары одинаковых радиусов совпадут. Действительно, из задачи **38.2** следует, что шар переходит в шар. При этом радиус шара сохраняется.

38.12. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$. Рассмотрим две точки A и B, для которых $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Тогда $f(\vec{a}) = \overrightarrow{f(A)\, f(B)}$. Нетрудно показать, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то и $\overrightarrow{f(A)\, f(B)} = \overrightarrow{f(C)\, f(D)}$ (так как движение сохранит параллельность, длину векторов, а сонаправленность можно определить в терминах принадлежности к одной полуплоскости). Это доказательство является необходимым для того, чтобы введённое определение было корректным.

38.13. В некоторых пунктах задачи мы не будем указывать свойств отображения, если оно является известным.

а) Это зеркальная симметрия.

б) Это осевая симметрия относительно оси абсцисс.

в) Это центральная симметрия относительно начала координат.

г) Указанное преобразование оставляет на месте полупространство точек с неотрицательной абсциссой (это полупространство является множеством неподвижных точек). При этом на указанное полупространство симметрично отображается полупространство точек с отрицательной абсциссой. Поэтому у точки вида $(x; y; z)$ при $x \neq 0$ имеются два прообраза. Таким образом, отображение необратимо. Оно переводит на себя плоскости вида $x = a$ $(a \geqslant 0)$ и любые прямые, лежащие в неподвижном полупространстве. Ясно, что других инвариантных прямых и плоскостей нет.

д) Это параллельное проектирование вдоль оси аппликат на плоскость $z = 0$.

е) Это проектирование на ось аппликат вдоль плоскости $z = 0$. Оно не является обратимым, так как у каждой точки оси есть целая плоскость прообразов. Неподвижными точками являются точки оси аппликат, которая, таким образом, является неподвижной прямой.

ж) Это параллельный перенос.

з) Это зеркальная симметрия относительно плоскости $x = 1$.

и) Это поворот на 120° относительно биссекторной прямой первого координатного октанта.

к) Неподвижными являются точки $x = 0$, образующие неподвижную плоскость. Указанное отображение обратимо (обратным к нему является $\left(\frac{x}{2};\ y;\ z\right)$. Плоскости вида $ay + bz = c$ (т. е. параллельные оси абсцисс) отображаются на себя (так как ордината и аппликата остаются неизменными при указанном отображении). Это отображение — сжатие к плоскости $x = 0$.

л) Множеством неподвижных точек является прямая $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$ Отображение является обратимым (обратное к нему — $\left(\frac{x}{2};\ 2y;\ z\right)$). Переходят на себя плоскости вида $z = a$.

м) Множество неподвижных точек — плоскость $y = 0$. Отображение обратимо (обратное к нему — $(x - y;\ y;\ z)$). Найдём плоскости, отображающиеся на себя. Пусть уравнение этой плоскости $ax + by + cz = d$. Координаты образа точки плоскости должны по-прежнему удовлетворять уравнению плоскости. Получаем $ax + ay + by + cz = d$. Учитывая исходное уравнение, имеем $ay = 0$. Значит, либо у всех точек искомой плоскости $y = 0$ (эта плоскость найдена ранее), либо в уравнении $a = 0$ (т. е. искомые плоскости параллельны оси абсцисс). Ясно, что прямые, отображающиеся на себя, также параллельны оси абсцисс либо лежат в неподвижной плоскости.

н) Найдём обратное отображение. Для этого решим систему

$$\begin{cases} x + y = x', \\ y + z = y', \\ z + x = z' \end{cases}$$

относительно переменных x, y, z. Получаем

$$\begin{cases} x = \dfrac{y' + z' - x'}{2}, \\ y = \dfrac{z' + x' - y'}{2}, \\ z = \dfrac{x' + y' - z'}{2}, \end{cases}$$

что и даёт формулу обратного преобразования. Чтобы найти неподвижную точку, надо решить систему

$$\begin{cases} x + y = x, \\ y + z = y, \\ z + x = z, \end{cases}$$

откуда имеем $x = y = z = 0$. Для нахождения инвариантной плоскости запишем её уравнение как $ax + by + cz + d = 0$. После применения преобразования координаты точки должны удовлетворять указанному уравнению. Имеем $ax + ay + by + bz + cz + cx + d = 0$, откуда $ay + bz + cx = 0$. Рассмотрев различные тройки $(x;\ y;\ z)$, удовлетворяющие уравнению

исходной плоскости (например, $\left(0;\ 0;\ \frac{d}{c}\right)$ и далее по циклу), убеждаемся, что $a = b = c = 0$. Итак, инвариантных плоскостей нет. Инвариантную прямую лучше всего искать в виде $\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = ct + z_0. \end{cases}$ Тогда после применения указанного преобразования получаем систему равенства $\begin{cases} (a+b)t + 2x_0 = at_1 + x_0, \\ (b+c)t + 2y_0 = bt_1 + y_0, \\ (c+a)t + 2z_0 = ct_1 + z_0, \end{cases}$ которая должна выполняться при всех t **R.**
После сложения равенств системы получаем $(a + b + c)(2t - t_1) = -x_0 - y_0 - z_0$.

Так как для данной прямой $a + b + c$ и $-x_0 - y_0 - z_0$ — величины постоянные, то и величина $2t - t_1$ не должна зависеть от t. Пусть $2t - t_1 = u$. Подставив выражение для t_1 через t и u в исходную систему, получаем систему $\begin{cases} (b - a + u)t = -x_0, \\ (c - b + u)t = -y_0, \\ (a - c + u)t = -z_0, \end{cases}$ которая должна выполняться при всех $t \in$ **R.**
Но тогда с необходимостью получаем $b - a + u = c - b + u = a - c + u = 0$, откуда $u = 0$ и $a = b = c$. Кроме того, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Итак, искомая прямая проходит через начало координат параллельно вектору (1; 1; 1), т. е. является биссекторной прямой первого координатного октанта.

З а м е ч а н и е. Нахождение инвариантной прямой представляло собой, по сути, нахождение собственного вектора соответствующего линейного преобразования.

Рисуя куб и его образы, следует учесть, что в пп. «г», «д», «е», «к», «л», «м», «н» размеры и форма полученного образа будут существенно зависеть от положения исходного куба относительно выбранной системы координат.

38.14. а) Отображение обратимо (отображение, обратное к нему, задаётся формулой $f^{-1}(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{a}$). Неподвижных точек не имеет, инвариантными прямыми и плоскостями являются прямые и плоскости, параллельные $\vec{a}$.

б) Это гомотетия. Она имеет одну неподвижную точку, инвариантными являются прямые и плоскости, проходящие через центр гомотетии.

в) Ясно, что отображение необратимо, так как существует целая плоскость точек — концов векторов $\vec{x}$, для которых $\vec{a} \cdot \vec{x}$ (а следовательно, и образ при отображении) есть одна и та же величина (это плоскость, перпендикулярная $\vec{a}$).

Для нахождения неподвижных точек запишем: $(\vec{x}\cdot\vec{a})\cdot\vec{a}=\vec{x}$. Тогда $\vec{x}\|\vec{a}$. Пусть $\vec{x}=k\vec{a}$. Имеем $k|\vec{a}|^2\vec{a}=k\vec{a}$, откуда либо $\vec{a}=\vec{0}$ (в этом случае отображение стягивает всё пространство в точку), либо $k=0$ (т. е. точка, от которой откладываются все векторы, является неподвижной). Если же $|\vec{a}|=1$, то любой вектор, коллинеарный $\vec{a}$, переходит в себя. Таким образом, множеством неподвижных точек в этом случае является прямая, проходящая через начало векторов параллельно вектору $\vec{a}$.

Плоскостей, отображающихся на себя, нет, так как образом всего пространства является прямая, параллельная $\vec{a}$ и проходящая через начало векторов. Эта прямая является инвариантной, если $\vec{a}\neq\vec{0}$.

г) Отображение не является обратимым, так как векторы $\vec{x}$ и $-\vec{x}$ имеют один и тот же образ (нетрудно показать, что образы векторов совпадают только тогда, когда они равны или противоположны). Множеством неподвижных точек является целая плоскость, задаваемая уравнением $\vec{a}\quad\vec{x}=1$.

Прямых и плоскостей, отображаемых в точности на себя, кроме инвариантных, указанное отображение не имеет.

38.15. Задано линейное отображение аффинного пространства. Таковым является, например, любое движение (см. задачу **38.7**). Образом $\vec{0}$ является всегда $\vec{0}$ (это следует из равенства $f(\vec{0})=f(\vec{0}+\vec{0})=f(\vec{0})+f(\vec{0})$). Параллельное проектирование, а также все отображения задачи **38.13** (кроме п. «г») удовлетворяют таким условиям. Из сказанного ясно, что прообразом $\vec{0}$ может быть не только $\vec{0}$, но и целая прямая либо плоскость.

38.16. Указанное отображение есть инверсия пространства относительно сферы единичного радиуса с центром в точке O и радиусом 1. Свойства такой инверсии дословно переносятся с плоского случая (см.: «Геометрия. 9 класс» тех же авторов для классов с углублённым изучением математики, § 32).

38.17. См. решения указанных задач.

38.18. Движение является обратимым отображением. В частности, у любого вектора должен быть прообраз. Предположим, что образ базиса при движении не есть базис. Тогда (см. задачу **38.7**) образ любого вектора является линейной комбинацией $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{c}_1$. Но эти векторы линейно зависимы, потому их линейные комбинации заполнят лишь плоскость, что и приведёт к противоречию.

38.19. Оба указанных движения имеют в качестве неподвижной исходную неподвижную точку.

38.20. Да. Это точки A и B, а значит (см. задачу **38.8**), и вся прямая AB.

§ 39. Частные виды движений пространства

Особенность этого параграфа заключается в том, что его материал является непосредственным геометрическим применением в решении задач. Поэтому при его изучении основное внимание стоит уделить именно решению задач.

Задачи к § 39

В этом и дальнейших параграфах множества точек, переходящие в себя при данном преобразовании, называются инвариантными множествами этого преобразования (например, инвариантная прямая, инвариантная плоскость).

Для задач **39.10, 39.12, 39.15—39.27, 39.92** решения не приводятся в силу простоты указанных задач. Некоторые из рисунков приведены в решениях задач к главе IX.

Особое внимание стоит обратить на задачи **39.44—39.47.** В них наверняка будут даны неверные ответы. Полезно обсудить с учащимися строгие доказательства, а также планиметрические аналоги утверждений этих задач.

В задаче **39.50** даны количества плоскостей симметрии. Описание плоскостей может быть без труда получено.

Работу с задачей **39.59** целесообразно проводить, показывая учащимся рисунки различных тел (или проекции этих тел) и выясняя, могут ли эти тела получаться вращением круга.

Полезно обсудить с учащимися следующую идею: если при движении центр одного из равных шаров перешёл в центр другого, то один шар перешёл в другой (см. задачи **39.5, 39.75, 39.76),** а также развитие этой идеи в применении к другим фигурам (высота и вершина прямого кругового конуса или высота прямого кругового цилиндра и т. д.).

Пропедевтический интерес представляет задача **39.84.** Она тривиально решается с помощью материала § 40.

Особую пропедевтическую ценность представляют задачи о сохранении ориентации базиса при различных видах движений **(39.30, 39.35, 39.48, 39.55).** Однако обсуждение их решений представляет серьёзную методическую проблему. Она связана с тем, что определение правой и левой тройки векторов неформально. Поэтому приходится объяснять решения этих задач на уровне интуитивных представлений, собственно, таких же, как и последующее объяснение того, что такое род движения. С другой стороны, род движения (шире — аффинного преобразования) может быть введён корректно (см.: Яглом И. М. Геометрические преобразования / И. М. Яглом. — М.: Физматгиз, 1957. В этой книге показано введение рода движения в плоском случае). Тогда тройки векторов имеют одинаковую ориентацию, если переводятся одна в другую аффинным преобразованием первого рода.

В решениях задач **39.58, 39.91, 39.100, 39.104** используется результат задачи **39.106.** Поэтому эту задачу необходимо разобрать перед решением указанных задач.

39.5. Параллельный перенос сохраняет направление, поэтому две пересекающиеся прямые в одной плоскости перейдут соответственно в параллельные прямые в другой плоскости.

39.6. Так как при центральной симметрии направления изменяются на противоположные, сохраняет силу рассуждение из предыдущей задачи.

39.7. Наиболее простое, хотя и не совсем строгое, рассуждение может быть таким: центр симметрии фигуры является её центром масс. При симметрии относительно плоскости, которая переводит фигуру в себя, центр масс перейдёт в себя, что и означает, что он лежит в плоскости симметрии.

Другое решение можно получить, заметив, что образ плоскости симметрии при центральной симметрии есть плоскость симметрии (причём, если центр в ней не лежит, эта плоскость будет параллельна исходной). Композиция симметрий относительно указанных плоскостей есть перенос, при котором тело переходит в себя. Тело, переходящее в себя при переносе, не является ограниченным.

Доказательство можно провести в координатах, положив плоскости как $x = a$ и $x = 0$. В результате последовательного применения двух симметрий получим перенос на вектор $(2a; 0; 0)$. Это же рассуждение даёт возможность разложить произвольный перенос как композицию симметрий относительно плоскостей, перпендикулярных вектору переноса, расстояние между которыми равно половине длины вектора.

Другой способ — непосредственно произвести два отражения в параллельных плоскостях, проследив, что направление любого вектора сохраняется. Для этого можно провести через направленный отрезок, изображающий вектор, плоскость, перпендикулярную плоскостям симметрий, после чего рассмотреть в этой плоскости композицию двух осевых симметрий.

Отметим, что от порядка симметрий зависит направление переноса.

39.9. Согласно теореме 39.6, движение, имеющее ровно одну неподвижную прямую, является поворотом вокруг этой прямой. Так как композиция двух зеркальных симметрий относительно пересекающихся плоскостей имеет неподвижной прямую пересечения этих плоскостей, достаточно показать, что у указанной композиции нет других неподвижных точек. Если есть ещё неподвижные точки, то по задаче **38.9** неподвижной является целая плоскость. Тогда движение либо тождественно (чего не может быть, иначе зеркальные симметрии являются взаимно обратными, а значит, их плоскости совпадают), либо является зеркальной симметрией. Это также невозможно, ибо эта плоскость должна быть плоскостью второй симметрии, так как точки плоскости первой симметрии при указанном движении переходят в плоскость, симметричную относительно плоскости второй симметрии.

Нетрудно теперь разложить поворот в композицию двух симметрий (достаточно построить образ одной точки). Из предыдущих рассуждений следует, что угол поворота равен удвоенному углу между плоскостями симметрий. Композиция некоммутативна (за исключением случая перпендикулярных плоскостей).

39.11. Здесь следует заметить, что в пересечении тетраэдров будет параллелепипед. Полезно предварительно обсудить с учащимися тот же вопрос с треугольниками в плоскости.

39.13. а) Рассмотрим четырёхугольную пирамиду, вершина которой проектируется в центр параллелограмма основания. Отразим её в плоскости основания и рассмотрим объединение исходной пирамиды и её образа — оно и будет искомым многогранником.

б) Заметим, что многогранника, имеющего ровно две плоскости симметрии и центр симметрии, не существует. Действительно, пусть такой многогранник есть. Тогда заметим, что его плоскости симметрии должны быть перпендикулярны (очевидно, что образ плоскости симметрии многогранника при движении, переводящем многогранник в себя, есть плоскость симметрии. Так как плоскостей симметрии всего две, то при симметрии относительно одной из них другая переходит в себя). При этом, согласно задаче **39.7,** центр симметрии лежит на прямой их пересечения.

Заметим теперь, что центральная симметрия есть композиция трёх зеркальных симметрий, плоскости которых попарно перпендикулярны и проходят через центр симметрии (это легко показать, например, с помощью координат). При этом симметрии относительно этих плоскостей берутся в любом порядке. Рассмотрим в качестве этих плоскостей две плоскости симметрии многогранника и плоскость , перпендикулярную им обеим. Рассмотрим теперь композицию центральной симметрии и симметрий относительно обеих этих плоскостей. Это движение переводит многогранник в себя, являясь при этом симметрией относительно α.

в) Тот же пример, что и в п. «а», если в основании лежит прямоугольник.

39.14. Например, тор (фигура вращения круга вокруг оси, лежащей в плоскости этого круга и не пересекающей его).

39.28. Разрежем правильный октаэдр плоскостью симметрии на две половинки. Эти половинки и будут указанными телами.

39.29. а) Да. У конуса есть круговые сечения любого радиуса, не превосходящего радиус основания. Ясно, что можно выбрать значение радиуса сечения, не превосходящим радиус основания каждого конуса.

Можно передвинуть конусы вдоль плоскости так, чтобы совпали оси, а затем двигать один конус вдоль оси, оставляя другой на месте. Ясно, что будет момент, когда вершина одного конуса окажется внутри другого. Тогда их поверхности пересекутся по искомому сечению.

б) Да. См. решение предыдущего пункта.

39.30. Да, ибо перенос можно осуществить механическим движением.

39.31. Перенос не имеет неподвижной точки, если его вектор ненулевой. Действительно, вектор переноса соединяет точку и её образ. В случае неподвижной точки этот вектор нулевой.

В результате переноса на себя отображаются прямые и плоскости, параллельные вектору переноса.

39.32. Да. Пространство заполняется образами параллелепипеда при переносах на векторы, представляющие собой суммы целых кратных (целочисленные линейные комбинации) векторов сторон исходного параллелепипеда.

39.33. а) Не всегда. У двух окружностей на поверхности шара перпендикуляры, восставленные к плоскостям окружностей в их центрах, должны пересечься в центре шара. Ясно, что для центрально-симметричных окружностей это не всегда верно.

б) Да. Рассмотрим композицию двух центральных симметрий — одной относительно центра одной из окружностей и другой — переводящей эту окружность в другую. В соответствии с решением задачи **39.13** каждая из симметрий представляется в виде композиции трёх зеркальных симметрий относительно попарно перпендикулярных плоскостей, пересекающихся в данной точке, причем порядок выполнения симметрий неважен. Выберем эти тройки так, чтобы плоскости из разных троек разбились на пары параллельных. Так как симметрии внутри троек можно располагать в произвольном порядке, а композиция зеркальной симметрии и переноса на вектор, перпендикулярный плоскости симметрии, является зеркальной симметрией, получим, что указанное движение есть перенос. Итак, окружности переходят одна в другую при переносе, а значит, лежат на поверхности цилиндра.

Тот же результат можно было получить, заметив, что плоскости этих окружностей параллельны (так как центрально-симметричны). А две равные окружности в параллельных плоскостях могут служить основаниями цилиндра.

39.34. Да. В качестве примера годится тор (см. решение задачи **39.14).** В то же время для выпуклых тел центр симметрии обязательно им принадлежит (так как является серединой отрезка между точкой тела и её образом — также точкой тела).

39.35. Нет. Нетрудно видеть, что при центральной симметрии правая тройка векторов перейдет в левую.

39.36. Проходящие через центр симметрии (см. решение задачи **39.6).**

39.37. а) Нет. Объединение двух неравных непересекающихся шаров не имеет центра симметрии.

б) Нет. Пересечение шара и куба, вершина которого в центре шара, не является центрально-симметричным телом.

39.38. Нет. В качестве контрпримера рассмотрим рисунок 100. Если отсечь плоскостью цилиндр, останется тело, не имеющее центра симметрии.

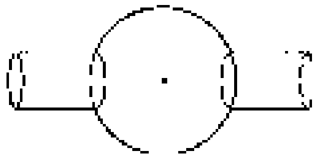

Рис. 100

Обратное утверждение (если склеить по плоскому участку границы два центрально-симметричных тела, то получится центрально-симметричное тело) также неверно. Достаточно просто склеить два непрямоугольных параллелепипеда с общей гранью.

39.39. а) Не всегда. Если отрезки симметричны, то параллелограмм, сторонами которого они являются, также симметричен относительно этой плоскости, т. е. является прямоугольником.

б) Не всегда. Плоскость симметрии должна проходить через эту точку перпендикулярно плоскости отрезков, при этом деля угол между ними пополам. Ясно, что если отрезки делятся точкой пересечения не в одинаковом отношении, то при симметрии относительно такой плоскости друг в друга они не перейдут.

в) Не всегда (см., например, п. «а»).

39.40. Равнобочная трапеция (или прямоугольник). Отрезки, соединяющие соответствующие концы исходных отрезков, перпендикулярны одной и той же плоскости симметрии.

39.41. Рассмотрим точки падения перпендикуляров из A на плоскости симметрий. Заметим, что из этих точек перпендикуляр из A на прямую a виден под прямым углом. Значит, они образуют сферу, диаметром которой является указанный перпендикуляр. Отметим теперь, что точка, симметричная A, получается из рассмотренной гомотетией с центром в A и коэффициентом 2. Ответ: сфера, построенная как на диаметре на отрезке, соединяющем A и образ A при симметрии относительно прямой a.

39.42. а) Параллелен α.

б) Перпендикулярен α.

39.43. Да. Прямая призма с неравнобедренным треугольником в основании имеет одну плоскость симметрии.

У прямой призмы с равнобедренным треугольником в основании имеются две плоскости симметрии.

У правильной n-угольной пирамиды имеются n плоскостей симметрии.

39.44. а) Не всегда.

б) Нет. Контрпримером является параллелепипед, все грани которого — равные ромбы.

39.45. Четыре. Пример прямого параллелепипеда с ромбом в основании показывает, что меньшего числа плоскостей не хватит.

Для доказательства того, что четырёх плоскостей хватит, достаточно заметить, что плоскость симметрии проходит либо через два параллельных ребра, либо через середины параллельных рёбер.

39.46. Не всегда. Равные окружности, лежащие в одной плоскости, симметричны относительно некоторой плоскости, но на одной сфере не лежат.

39.47. Да. Рассмотрим два равных отрезка, пересекающиеся в своих серединах. На этих отрезках как на средних линиях построим равные прямоугольники, на которых как на основаниях построим равные прямые призмы. Указанные призмы симметричны относительно двух плоскостей, перпендикулярных плоскости отрезков и делящих пополам углы между отрезками.

39.48. Нет.

39.49. Либо лежащие в плоскости симметрии, либо перпендикулярные ей.

39.50. а) В зависимости от того, какие две грани окрашены: пять плоскостей, если окрашены противоположные грани; две плоскости, если окрашены смежные грани.

Для случая трёх граней: три плоскости, если окрашены грани с общей вершиной; две плоскости, если среди окрашенных есть противоположные грани.

б) Пять плоскостей, если получился прямоугольный параллелепипед. В остальных случаях, если кубы не пересекаются, имеет одну или вообще не имеет плоскостей симметрии.

в) В зависимости от того, какой треугольник в основании и какой гранью приложены призмы, имеется от нуля плоскостей (если призмы были не прямые и приложены основаниями) до девяти плоскостей (если две призмы являлись половинами куба).

г) От нуля до шести плоскостей симметрии.

д) Если общая грань — прямоугольный треугольник, то плоскость этой грани и будет плоскостью симметрии. Если же общая грань — остроугольный треугольник, то, помимо плоскости этой грани, возможны ещё три плоскости симметрии, проходящие через пары симметричных рёбер (в случае если исходный прямоугольный тетраэдр был правильной пирамидой).

е) Если это правильный октаэдр, он имеет девять плоскостей симметрии. Некоторые из этих плоскостей исчезнут при изменении исходных пирамид. Останется не менее пяти плоскостей, если пирамиды приложены основанием. Если же они приложены треугольной гранью, получатся две плоскости симметрии.

ж) Все плоскости, проходящие через линию центров. Если шары равны, к ним добавится плоскость, перпендикулярная отрезку между центрами, проходящая через его середину.

39.51. Они симметричны относительно плоскости β, так как симметричность фигур может быть определена на языке углов и расстояний, они сохраняются при любом движении.

39.52. а) Таких поворотов бесконечно много, если не фиксировать угол. Оси таких поворотов образуют плоскость симметрии этих точек.

б) Только при осевой симметрии относительно любой оси, проходящей через середину отрезка между заданными точками перпендикулярно этому отрезку.

39.53. Поворотами относительно любой прямой, проходящей через центр.

Для простоты будем рассматривать только точки, выколотые на граничной сфере этого шара.

Шар с выколотой точкой отображается на себя поворотами вокруг прямой, проходящей через центр и эту точку.

Шар с двумя выколотыми точками отображается на себя при осевой симметрии относительно перпендикуляра из центра на отрезок между выколотыми точками. Если выколотые точки диаметрально противоположны, то добавляется ещё ось, содержащая эти точки.

В общем случае поворота, отображающего шар с тремя выколотыми точками в себя, нет. Если эти точки располагаются в вершинах равностороннего треугольника, то шар переходит в себя при поворотах на 120° в любую сторону относительно оси, проходящей через центр шара и центр треугольника. Если же точки расположены в вершинах равнобедренного треугольника (в том числе вырожденного), то шар переходит в себя при повороте вокруг оси, проходящей через вершину этого треугольника, на некоторый угол, зависящий от вида треугольника.

39.54. а) Так как середина одного отрезка должна перейти в середину другого, то ось поворота должна лежать в плоскости, перпендикулярной отрезку между серединами и проходящей через середину этого отрезка (см. задачу **39.52).** Рассмотрим теперь конец одного отрезка и построим такую же плоскость (так как он переходит в конец другого отрезка). Таких плоскостей, вообще говоря, будет две.

Линия пересечения каждой из указанных плоскостей с плоскостью, построенной для середин, есть искомая ось. Если же плоскости будут параллельны (например, если отрезки параллельны), ось поворота будет только одна.

Аналогично разбирается случай, когда середины отрезков совпадают.

б) Выберем на прямых по равному отрезку и построим ось вращения, переводящую один из них в другой. Ясно, что при этом одна прямая перейдет в другую. Таким образом, для пары прямых осей поворота бесконечно много.

в) Для пересекающихся плоскостей осью поворота может служить любая прямая, параллельная линии пересечения этих плоскостей (в том числе и сама линия пересечения). Покажем, что других осей нет. Действительно, достаточно заметить, что образ прямой, скрещивающейся с осью поворота, будет скрещиваться со своим прообразом (если прямая не перпендикулярна оси поворота). Если ось не параллельна прямой пересечения, то прообраз этой прямой будет с ней скрещиваться либо пересекаться. Легко видеть, что эти случаи невозможны.

Для параллельных плоскостей осью поворота служит любая прямая, параллельная этим плоскостям, расположенная на равном расстоянии от них (она будет осью симметрии).

г) Для двух шаров ось поворота есть любая ось, переводящая центр одного в центр другого (см. задачу **39.52).**

Ясно, что если при повороте фигуры меняются местами, то это осевая симметрия.

39.55. Нет.

39.56. Если поворот не является осевой симметрией, то инвариантных прямых, отличных от оси, нет. Инвариантными являются плоскости, перпендикулярные оси.

При осевой симметрии к указанным добавляются прямые, пересекающие ось и перпендикулярные ей, а также плоскости, содержащие ось.

39.57. а) Если одна из граней оказалась на месте другой, то другая должна оказаться на месте первой.

б) Да, например, при осевой симметрии относительно прямой, содержащей центры противоположных граней, другие пары противоположных граней меняются местами.

39.58. а) Заметим, что образ центра симметрии при движении есть центр симметрии образа. Если же при симметрии тело переходит в себя, то центр симметрии тела переходит в центр симметрии тела. Осталось отметить, что композиция двух центральных симметрий с различными центрами есть перенос (см. решение задачи **39.33),** при котором тело переходит в себя, что противоречит ограниченности.

б) Ось симметрии должна пересекать плоскость отражения. В противном случае образ плоскости отражения есть плоскость отражения, параллельная исходной. Композиция двух отражений в параллельных плоскостях есть перенос.

Пример с шаром показывает, что ничего более сильного сказать нельзя.

в) Как показывает пример с тором, центр наибольшего шара, содержащегося в теле, может и не лежать на оси симметрии (тор описан в решении задачи **39.14).** Если такой шар один, то его центр должен лежать на оси симметрии, так как если тело перешло при симметрии в себя, то и шар перешёл при симметрии в себя.

г) Так как такой шар единственный, то при симметрии он перейдёт в себя. Значит, его центр лежит на оси.

д) Диаметр тела может не пересекаться с осью симметрии (например, у правильного тетраэдра осью симметрии является прямая, проходящая через середины противоположных рёбер, а диаметром — любое ребро).

39.60. Пример с тором показывает, что не всегда. Выпуклое тело получится лишь в том случае, если проекция фигуры на ось вращения совпадёт с пересечением оси и фигуры (рассмотрен случай с осью вращения, лежащей в плоскости фигуры).

39.61. а) Бесконечно много (это сама прямая и все прямые, пересекающие её и перпендикулярные ей).

б) Две параллельные прямые имеют бесконечно много осей симметрии (все пересекающие их и перпендикулярные прямые), две пересекающиеся прямые имеют три оси симметрии (перпендикуляр к плоскости этих прямых в точке их пересечения и прямые, содержащие биссектрисы углов между данными прямыми).

Две скрещивающиеся прямые имеют одну ось симметрии — прямую, перпендикулярную обеим этим прямым и пересекающую их.

в) Девять осей — три, соединяющие центры противоположных граней, и шесть, соединяющих середины противоположных рёбер

г) Три оси, проходящие через середины противоположных рёбер.

д) Октаэдр двойствен кубу, поэтому у него столько же осей симметрии, сколько и у куба, т. е. девять.

е) У икосаэдра пятнадцать осей симметрии, проходящих через середины параллельных рёбер.

ж) У додекаэдра столько же осей симметрии, сколько и у икосаэдра, так как они двойственны.

39.62. Совместим основания тетраэдров параллельным переносом на вектор бокового ребра призмы. От этого углы между рёбрами не изменятся. В полученной фигуре углы сосчитать легко.

39.63, **39.64.** Разобьём на цилиндры, конусы, усечённые конусы, вычисляя их параметры и находя объёмы и площади поверхностей этих частей.

39.65. а) Так как $BB_1 \parallel CC_1$, искомый угол равен углу BB_1O. Ответ: $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

б) Перенесём параллельно отрезок B_1O на вектор $\overrightarrow{B_1D_1}$. Получим треугольник CD_1O' с известными сторонами, в котором требуется найти угол CD_1O'. Ответ: $\varphi = \arccos \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

в) Найдём вместо этого угол между (B_1O) и (AA_1B_1) (так как $(AA_1B_1) \parallel (CC_1D_1)$, угол будет равен искомому). Угол находим тривиальным образом. Ответ: $\varphi = \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

г) Образ (B_1O) при параллельном переносе на вектор $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{B_1D_1}$ будет лежать в плоскости (A_1C_1D), значит, исходные прямая и плоскость были параллельны.

39.66. Перенесём плоскость сечения на $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}$. Образом этой плоскости будет плоскость PAB. При этом само сечение будет составлять $\dfrac{3}{4}$ от площади грани PAB. Площадь грани PAB равна S, так как исходная пирамида симметрична относительно плоскости PBD. При указанной симметрии грань PBC переходит в грань PBA. Ответ: $\frac{3}{4}S$.

39.67. Перенесём параллельно боковые рёбра так, чтобы вершины верхнего основания совпали. Тогда задача станет такой: найти высоту правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 1, а противоположные боковые грани перпендикулярны. Ответ: $\frac{1}{2}$.

39.68. Можно либо сразу воспользоваться формулой объёма треугольного призматического клина (см. решение задачи **30.28),** либо разбить фигуру плоскостями, перпендикулярными BC и проходящими через B и C, на две равные пирамиды и прямую призму. Объёмы указанных частей легко сосчитать. Ответ: $V = \frac{9}{2}$.

39.69. Раз призма прямая, расстояние между параллельными гранями равно высоте трапеции, лежащей в основании призмы. При этом стороны трапеции относятся так же, как площади боковых граней (причем известно, какие именно стороны являются основаниями). Отсюда вычисляем стороны трапеции: $\frac{3}{4\sqrt{2}}$, $\frac{2}{2\sqrt{2}}$, $\frac{9}{4\sqrt{2}}$, $\frac{3}{\sqrt{2}}$ и высоту призмы: $h = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $V = \frac{5}{2}$.

39.70. Рассмотрим высоту исходного тетраэдра и заметим, что при повороте вокруг нее на 120° полученный многогранник переходит в себя. Значит, его грани, полученные из граней тетраэдра, переходят друг в друга.

Нетрудно видеть, что если полученные грани перпендикулярны основанию исходного тетраэдра, то все рёбра многогранника равны. Кроме того, ясно, что при изменении угла наклона между полученными гранями и основанием некоторые рёбра монотонно меняются (именно соединяющие вершины вращаемых граней). Значит, угол поворота только один, он равен $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$.

39.71. Пусть луч света a падал на плоскость . Плоскость, полученную после поворота, обозначим α'. По закону отражения отраженный луч симметричен продолжению луча за плоскость зеркала относительно этой плоскости. А значит, луч света отклонится на тот же угол, на который отклонится образ при симметрии исходного луча. Луч a, полученный отражением исходного в плоскости α, назовем a_1, а в плоскости α' – a_2 (рис. 101).

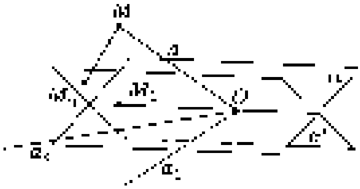

Рис. 101

Теперь стандартным образом (например, по теореме косинусов для трёхгранного угла) подсчитываем угол наклона φ луча к новой плоскости. Получаем φ = 30°. Значит, угол между a и a_2 равен 60°.

Получили трёхгранный угол с вершиной O, плоские углы которого равны 90° и 60°, а двугранный угол между ними находится из трёхгранного угла MM_1M_2O и равен $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. Теперь можно найти третий плоский угол (он будет искомым): $\angle(a_1; a_2) = 60°$.

39.72. Рассмотрим осевую симметрию относительно перпендикуляра из точки K на плоскость AA_1B_1. При этой симметрии половинки призмы меняются местами. Значит, плоскость AKB_1 делит объём призмы пополам.

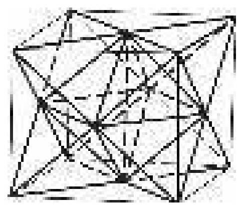

Рис. 102

39.73. На рисунке 102 изображено пересечение указанных тетраэдров. Оно является правильным октаэдром, двойственным кубу, сопровождающему данный тетраэдр. После этого легко получить, что объём этого октаэдра равен $\frac{1}{2}V$.

В случае произвольного угла поворота (можно считать < 90°) общей частью будет объединение двух восьмиугольных пирамид, приложенных основанием (восьмиугольное основание образуется как пересечение двух квадратов — сечений тетраэдра плоскостью, перпендикулярной оси симметрии). Площадь основания равна $\frac{2}{1+\sin\varphi+\cos\varphi}S$, где S — площадь упомянутого квадратного сечения. Поэтому объём общей части составляет $\frac{1}{1+\sin\varphi+\cos\varphi}V$, (объёмы общих частей относятся как площади оснований пирамид).

39.74. а) Осуществим перенос на вектор, соединяющий основания перпендикуляров. При этом один из перпендикуляров перейдёт в другой (так как плоскость перейдёт в себя, свойство перпендикулярности прямой и плоскости сохранится, а из одной точки можно восставить лишь один перпендикуляр к плоскости). Значит, перпендикуляры были параллельны.

б) Решается аналогично решению п. «а» переносом на вектор, соединяющий точки пересечения прямой с плоскостями.

в) Осуществим перенос на вектор, соединяющий точки пересечения этих прямых с плоскостью. При этом плоскость перейдет в себя, прямые совпадут, значит, образ прямой был перпендикулярен плоскости, а она сама перпендикулярна плоскости.

г) Осуществим перенос вдоль ребра двугранного угла. При этом линейные углы совпадут.

39.75. Шары совмещаются переносом, совмещающим их центры.

Для цилиндров это неверно. Примером могут служить два цилиндра с непараллельными осями (ибо направления осей при переносах сохраняются).

Для конусов это также неверно. Опять же примером могут служить конусы с непараллельными осями.

39.76. а) Они центрально-симметричны относительно середины отрезка между центрами.

б) Если оси цилиндров параллельны. В этом случае существует центральная симметрия, переводящая одну ось в другую, а при совпадении осей равные цилиндры совпадут. В случае произвольного цилиндра вместо оси надо говорить об образующей и требовать, чтобы соответственные основания разных цилиндров переводились центральной симметрией друг в друга.

в) Если оси конусов параллельны и при этом векторы вдоль этих осей, соединяющие вершину с центром основания, противонаправлены. Если речь идет о произвольном конусе, в качестве таких векторов можно взять перпендикуляры из вершины на основание.

39.77. Проведём симметрию относительно точки касания. Шары поменяются местами, плоскость перейдёт в себя, значит, окружности сечений тоже поменяются местами.

39.78. Если эти плоскости параллельны, то центром симметрии служит любая точка, равноудалённая от этих плоскостей. Для пересекающихся плоскостей центр симметрии — любая точка на линии пересечения.

39.79. Решение аналогично решению задачи **39.1** в учебнике. Воспользуемся тем, что центральная симметрия — единственное движение, меняющее направление вектора на противоположное. Имеем $g(f(\vec{a})) = -f(\vec{a})$, тогда

$$f^{-1} \circ g \circ f(\vec{a}) = f^{-1}(-f(\vec{a})) = -f^{-1}(f(\vec{a})) = -\vec{a}.$$

39.80. Утверждение задачи непосредственно следует из симметрии относительно биссекторной плоскости при ребре PB. Указанные отрезки при этой симметрии переходят друг в друга.

39.81. Отметим, что утверждение задачи становится верным лишь в случае, когда общая точка ровно одна. В противном случае контрпримером является прямая, перпендикулярная плоскости симметрии.

Если $a \,||\, \alpha$, то $b \,||\, \alpha$. Тогда, так как эти прямые лежат в одной плоскости, они параллельны, что противоречит условию.

Значит, прямая a пересекает плоскость симметрии α. Точка пересечения является неподвижной точкой симметрии, следовательно, принадлежит и прямой b. Значит, эта точка и есть точка пересечения прямой и её образа, а она принадлежит плоскости α.

39.82. Рассмотрим фигуру, гомотетичную полученной с центром в центре куба и коэффициентом $\frac{1}{2}$. При указанной гомотетии вершины фигуры перейдут в центры граней куба. Из § 26 известно, что центры граней куба являются вершинами правильного октаэдра. Значит, исходная фигура также являлась правильным октаэдром.

Так как грань октаэдра, двойственного кубу, содержит меньше половины отрезка от вершины до центра, то полученная фигура не будет содержать вершин куба.

З а м е ч а н и е. Мы считаем методически оправданным и наглядным использование понятия гомотетии до его формального прохождения. Данную задачу можно решить без использования слова «гомотетия» (показывается, что грани полученного октаэдра подобны как треугольники с коэффициентом $\frac{1}{2}$ граням октаэдра, двойственного кубу).

39.83. Ясно, что тетраэдр $A_1B_1C_1P_1$ будет переходить в себя при всех движениях, переводящих в себя тетраэдр $PABC$. Но столько элементов симметрии имеет только правильный тетраэдр.

39.84. Пусть — плоскость симметрии для g. Рассмотрим плоскость $= f^{-1}(\alpha)$. Тогда $f^{-1} \circ g \circ f(\beta) = \beta$, причем каждая точка плоскости будет неподвижна. Таким образом, указанное движение имеет неподвижную плоскость, не будучи при этом тождественным (достаточно рассмотреть любую точку не из плоскости β), т. е. является зеркальной симметрией.

39.85. При повороте вокруг A_1C на 120° куб переходит в себя. При этом плоскость AB_1D_1 переходит в себя. Значит, она перпендикулярна оси поворота.

39.86. Эта ось проходит через центр симметрии плоской фигуры перпендикулярно её плоскости.

Обратное утверждение неверно. Действительно, плоская ось симметрии плоской фигуры является пространственной осью симметрии.

39.87. При симметрии относительно биссектрисы угла плоскость переходит в себя, а прямые, содержащие стороны, меняются местами. Значит, углы между этими прямыми и плоскостью равны.

39.88. Как указано в решении задачи **39.9,** поворот вокруг оси есть композиция зеркальных симметрий относительно плоскостей, пересекающихся по этой оси, угол между которыми равен половине угла поворота. Для осевой симметрии это означает, что она представима в виде композиции зеркальных симметрий относительно перпендикулярных плоскостей (при этом симметрии коммутируют).

Пусть a и b — две перпендикулярные оси симметрии фигуры F. Обозначим плоскость, проходящую через a и b. Пусть плоскость α такова, что $\alpha \perp \beta$, $a \subset \beta$. Аналогично плоскость такова, что $\gamma \perp \beta$, $b \subset \gamma$. Нетрудно видеть, что $\alpha \perp \gamma$. Заметим теперь, что композиция симметрий относительно a и b есть композиция зеркальных симметрий последовательно относительно плоскостей α, β, γ, т. е. является композицией симметрий относительно плоскостей α и γ. Так как эти плоскости перпендикулярны, то указанная композиция есть осевая симметрия. При этом ось симметрии перпендикулярна плоскости β.

39.89. Это утверждение является частным случаем более общего утверждения: пусть f — движение, переводящее фигуру F на себя, и пусть A есть центр, ось или плоскость симметрии фигуры F. Тогда $f(A)$ также есть центр, ось или плоскость симметрии.

Данное утверждение интуитивно совершенно очевидно. Действительно, если при движении f фигура F осталась на месте, то образ, например, оси симметрии является осью симметрии образа фигуры F, т. е. самой фигуры F. Строгое доказательство этого утверждения также несложно и сводится к тому, что симметричность точек относительно точки, прямой или плоскости формулируется на языке углов и расстояний. Так как при движении углы и расстояния сохраняются, сохраняется симметричность точек фигуры относительно образа точки, прямой или плоскости.

39.90. Да. Пусть $f(A) = A'$, $f(B) = B'$. Тогда $\overrightarrow{A'B'} = f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}$, откуда по известному свойству векторов $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

39.91. Нет. См. решение задачи **33.19б,** где показано, что композиция двух центральных симметрий есть перенос. Если тело имеет два центра симметрии, то оно переходит в себя при переносе, являющемся композицией симметрий относительно этих центров. Следовательно, тело не ограничено.

39.93. а) Пусть центр симметрии тела не лежит на диаметре. Тогда при симметрии относительно центра диаметр тела переходит в параллельный диаметр. Как указано в решении задачи **16.12,** этого не может быть.

б) Нет. Рассмотрим тело, состоящее из двух касающихся (или слегка пересекающихся) одинаковых шаров. Ясно, что наибольшим шаром, содержащимся в теле, будет один из таких шаров, а центром симметрии является точка касания (центр окружности пересечения граничных сфер). Примером выпуклого тела, в котором не всякий центр шара наибольшего диаметра совпадёт с центром симметрии, является обычный цилиндр, в котором образующая длиннее диаметра основания.

Если шар наибольшего диаметра, лежащий в теле, единствен, то его центр будет совпадать с центром симметрии тела, так как при симметрии тело переходит в себя, а шар наибольшего диаметра, содержащийся в теле, переходит в шар такого же диаметра, содержащийся в теле. В силу единственности такого шара он обязан переходить в себя.

в) Да. Рассуждения, аналогичные рассуждениям из предыдущего пункта, приводят к необходимости доказать, что шар наименьшего диаметра, содержащий данное тело, единствен.

Пусть таких шаров хотя бы два. Тогда тело содержится в их пересечении. Но пересечение шаров одинакового диаметра помещается в шар меньшего диаметра, что противоречит выбору исходных шаров как наименьших.

39.94. Да. При центральной симметрии и тело, и секущая кость переходят в себя, значит, в себя перейдет и сечение.

Обратное утверждение может быть одним из следующих:

1) Если каждое сечение тела, проходящее через некоторую точку, центрально-симметрично с центром в этой точке, то и само тело центрально-симметрично с центром в той же точке.

2) Если каждое из сечений центрально-симметричного тела, проходящих через некоторую точку, центрально-симметрично, то эта точка — центр симметрии исходного тела.

3) Если сечение центрально-симметричного тела центрально-симметрично, то центр симметрии сечения есть центр симметрии тела.

Сразу отметим, что утверждение 3 неверно (например, можно пересечь цилиндр любой плоскостью, параллельной основанию).

Менее очевидно, что неверно утверждение 2. Контрпримером является шар, любое сечение которого — круг.

Утверждение 1 справедливо. Действительно, если данная точка не является центром симметрии тела, то существует точка тела, симметричная которой не принадлежит телу. Проведя сечение через эту точку и центр симметрии, получим сечение, не симметричное относительно данной точки.

Интересно рассмотреть вопрос об ослаблениях теоремы 1, например, останется ли она верной без упоминания, что центр симметрии в той точке, через которую проводятся сечения.

39.95. Покажем, что параллельная (необязательно ортогональная) проекция центрально-симметричного тела на любую плоскость есть центрально-симметричная фигура, причем её центром симметрии является проекция центра симметрии тела. Для этого необходимо показать, что точка, симметричная любой точке проекции тела, будет также точкой проекции тела. Пусть A' — точка проекции тела, A — одна из точек тела, проектирующихся в A'. Пусть B — точка тела, симметричная A относительно центра симметрии O. Тогда в принятых обозначениях из свойств параллельного проектирования следует, что O' будет серединой отрезка $A'B'$, т. е. B' симметрична A' относительно O'.

Обратное утверждение неверно. Любая проекция центрально-симметричного тела с несимметрично удалённой частью внутренности будет центрально-симметричной, в то время как само полученное тело таковым не будет.

39.96. Если диаметр тела единственный, то при симметрии он должен перейти в себя, а значит, либо быть перпендикулярным плоскости симметрии, либо лежать в ней (обе возможности присутствуют, например, в эллипсоиде). Если у тела не один диаметр, то о расположении его по отношению к плоскости симметрии ничего сказать нельзя (например, шар или конус, образующая которого является диаметром). Можно лишь показать, что диаметр тела имеет общую точку с плоскостью симметрии. В противном случае при симметрии два диаметра (исходный и его образ) образуют боковые стороны равнобочной трапеции либо прямоугольника, диагональ которых длиннее боковой стороны, что противоречит определению диаметра.

39.97. а) Да. Рассуждения аналогичны решению задачи **39.93в.**

б) Нет. Пример тот же, что и в решении **39.93б,** где плоскостью симметрии служит плоскость окружности пересечения граничных сфер шаров.

39.98. Покажем, что указанное движение имеет множеством своих неподвижных точек прямую, т. е. является поворотом.

Пусть a — ось поворота $gb = f^{-1}$ (a). Тогда для любой точки $B \in b$ $(B = f^{-1}$ (A), где $A \in a)$ имеем:

$$f^{-1} \circ g \circ f\,(B) = f^{-1} \circ g \circ f\,(f^{-1}\,(A)) = f^{-1} \circ g\,(A) = f^{-1}\,(A) = B.$$

Таким образом, прямая b является неподвижной. Непосредственным разбором других точек у нетрудно показать, что других неподвижных точек у данного движения нет.

39.99. Если плоскость параллельна оси симметрии, то она не пересекается со своим образом.

Пусть плоскость $\alpha \cap l = A$. Рассмотрим прямую $a \subset \alpha$, $a \perp l$, $A \in a$. Тогда при осевой симметрии относительно l прямая a перейдет в себя. Она и будет пересечением исходной плоскости и её образа. Таким образом, утверждение задачи верно.

39.100. Покажем, что любые две оси симметрии пересекаются. Если они параллельны, то композицией симметрий в этих осях является перенос, а тело, переходящее в себя при переносе, не является ограниченным.

Пусть оси симметрий скрещиваются. Представим каждую из симметрий как композицию двух зеркальных отражений относительно перпендикулярных плоскостей, причём пару плоскостей расположим параллельно. Получим, что композиция является композицией поворота и переноса, т. е. винтовым движением. Тело, переходящее в себя при винтовом движении, не является ограниченным.

Итак, каждая пара осей пересекается. Из известного обобщения задачи **2.7** следует, что если из набора прямых любые две пересекаются, то они либо лежат в одной плоскости, либо имеют общую точку. Так как в нашем случае оси симметрии не лежат в одной плоскости, то они пересекаются в одной точке.

39.101. Осевой симметрией. То, что это поворот, установлено в решении задачи **39.98.** Аналогичным образом рассмотрев плоскость, содержащую ось поворота, убеждаемся, что она переходит в себя.

39.102. Так как движения в пп. «в» и «г» могут быть произведены в пространстве, то можно вращать многогранник вокруг различных осей, смотря, не произошло ли самосовмещение. Для движений в пп. «а» и «б» можно смотреть, не совмещаются ли в каком-то положении многогранник и его отражение в зеркале. Если это произошло, значит, есть либо плоскость симметрии, либо центр.

39.103. Прежде всего докажем, что выпуклый многоугольник, разбитый на центрально-симметричные многоугольники, сам центрально-симметричен (это утверждение называется *теоремой Минковского*). Рассмотрим какую-нибудь сторону разбиваемого «большого» многоугольника; она состоит из одной или нескольких сторон прилегающих к ней «малых» многоугольников, на которые разбит «большой». Но каждый «малый» имеет центр симметрии и, следовательно, имеет сторону, равную и параллельную противоположной стороне его, прилежащей к рассматриваемой стороне «большого». Она одновременно есть сторона другого прилегающего к ней «малого» (предполагаем для простоты, что «малые» многоугольники смежны по целым сторонам, а не по их частям) и т. д. Мы убедимся, что каждая из частей, на которые разбита рассматриваемая сторона «большого», будет иметь соответствующую себе часть на противоположной стороне «большого». Рассматриваемый «большой» многоугольник имеет, таким образом, для каждой своей стороны противоположную ей равную (так как она составлена из таких же частей) и параллельную; отсюда следует, что он имеет центр симметрии, и именно в точке пересечения прямых, соединяющих накрест концы таких двух параллельных сторон.

Рассмотрим теперь выпуклый многогранник, все грани которого имеют центры симметрии. Пусть α_1 — какое-нибудь его ребро, P_1 — одна из граней, сходящихся в этом ребре. В силу того что она имеет центр симметрии, она имеет ребро α_2, равное, параллельное и противоположное ребру α_1. Пусть по ребру α_2 к грани P_1 примыкает грань P_2, у которой есть ребро α_3, равное, параллельное и противоположное α_2, и т. д. Так как граней у многогранника конечное количество, процесс завершится, причём на ребре α_1 (так как к каждому ребру примыкают две грани и у всех рёбер в середине цепочки эти грани использованы).

Спроектируем многогранник вдоль ребра α_1 на произвольную плоскость. Все грани, участвующие в цепочке, спроектируются в отрезки, остальные грани, лежащие по одну сторону от указанной цепочки, спроектируются в центрально-симметричные многоугольники (это показано в задаче **39.95).** Таким образом, получился многоугольник, разбитый на центрально-симметричные многоугольники.

Итак, проекция многогранника вдоль любого ребра является центрально-симметричным многоугольником. Рассмотрим произвольную грань P исходного многогранника и проекцию многогранника вдоль какого-либо ребра грани P. В силу того что проекция центрально-симметрична, найдется грань Q, проектирующаяся в отрезок, равный и параллельный проекции грани P. Тем самым грань Q оказывается параллельной грани P (если проекции двух плоскостей вдоль одного и того же направления суть параллельные прямые, то исходные плоскости параллельны). Но тогда при проекции вдоль любого ребра грани P проекция именно грани Q будет равна и параллельна проекции P (в силу центральной симметричности проекции многогранника должна быть проекция грани, параллельная проекции P, а в силу выпуклости многогранника, а значит, его проекции, параллельных сторон не может быть более двух). Заметим теперь, что многоугольник — проекция исходного многогранника — получен как проекция цепочки граней, составленной по параллельным рёбрам. Значит, взяв начальным ребром любое ребро грани P, мы найдём равное и параллельное ему ребро грани Q, и наоборот. Тем самым грани P и Q равны и параллельны. Заметим, что они центрально-симметричны относительно середины отрезка, соединяющего их центры симметрии.

Мы получили, что все грани многогранника разбились на пары центрально-симметричных. Пусть O — центр симметрии пары граней. Рассмотрим пару соседних граней, граничащих с данными по рёбрам, симметричным относительно O. Эти грани тоже будут центрально-симметричны (на проекции многогранника вдоль взятых рёбер они спроектируются в центрально-симметричные отрезки). Центр их симметрии совпадает с O, так как существует единственный центр симметрии, меняющей местами равные параллельные отрезки (общие рёбра исходных и соседних с ними граней).

Замечание. Утверждение задачи было доказано А. Д. Александровым в 1932 г. и называется *теоремой Александрова.* Оно обобщается на многомерный случай.

39.104. Этой точкой является центр масс тела. Так как образ центра масс ограниченного тела при симметрии есть центр масс образа, то если тело перешло в себя, то и центр масс перешёл в себя. Значит, он лежит на каждой из плоскостей.

Замечание 1. Утверждение о том, что движение сохраняет центр масс, может быть доказано так:

1) Центр масс системы точек определён векторным линейным равенством, а такие равенства при движении сохраняются. Значит, при движении сохранится центр масс системы точек.

2) Центр масс тела получается предельным переходом от центров масс точек. Можно показать, что движение сохранит этот предельный переход.

Замечание 2. Вместо центра масс, в соответствии с решением задачи **39.97**, можно использовать центр наименьшего шара, содержащего данное тело. Тем самым показано для тела, имеющего хотя бы три плоскости симметрии, совпадение центра масс и центра указанного шара.

39.105. В задаче **39.100** показано, что две оси вращения (являющиеся, в частности, осями симметрии) должны иметь общую точку. Пусть O — точка пересечения осей и A — точка границы, наиболее удалённая от O. Покажем, что композицией нескольких поворотов вокруг данных осей вращения точка A может быть переведена в любую точку сферы радиуса OA. Пусть B — произвольная точка указанной сферы, T и S — точки пересечения указанной сферы и осей вращения. Заметим, что из двух пар окружностей на сфере с центрами T и S, содержащих по одной из точек A и B, хотя бы в одной паре окружности будут пересекаться. Теперь ясно, что первым поворотом точку A переводим в точку пересечения окружностей, а вторым вокруг другой оси — в точку B (здесь не разобран тривиальный случай, когда точки A и B равноудалены от одной из осей).

Итак, поскольку граничная точка при движении переходит в граничную, граница исходного тела содержит сферу, причем так как A была выбрана наиболее удаленной, то тело находится внутри этой сферы. Но оно выпукло, поэтому заполняет область внутри сферы целиком, т. е. является шаром.

39.106. Рассмотрим точку тела и её образы при последовательном применении переноса. Все они будут принадлежать телу, в то же время расстояние между этой точкой и её образами становится сколь угодно большим (оно может быть равно целому числу длин вектора переноса). Таким образом, среди точек тела есть пары, находящиеся на сколь угодно большом расстоянии, т. е. тело не является ограниченным.

39.107. На части, пропорциональные двугранному углу. Ясно, что с ростом двугранного угла между полуплоскостями прямо пропорционально растёт объём (так как равным углам соответствуют равные объёмы). Значит, для   , измеряемого в радианах, отношение объёмов частей равно $\frac{\varphi}{\pi - \varphi}$.

§ 40. Теоремы о задании движений пространства

Материал этого параграфа играет подготовительную роль для изучения классификации движений.

Задачи к § 40

Задачи **40.1—40.4** помогают подготовить учащихся к пониманию доказательств классификационных теорем. Представляется полезным после изучения теорем вернуться к решению этих задач и классифицировать соответствующие движения.

К задаче **40.8** полезно вернуться после изучения следующего параграфа.

40.1. а) Пусть треугольники обозначены через ABC и AB_1C_1. Возможны случаи: 1) общая вершина является вершиной равнобедренных треугольников; 2) общая вершина является вершиной основания обоих треугольников; 3) общая вершина является в одном треугольнике вершиной, а в другом — вершиной основания.

Все указанные случаи разбираются аналогично. Разберем, например, случай 3. Так как вершина равнобедренного треугольника при движении должна перейти в вершину, то $f(B) = A_1$. Для других вершин возможны два случая: $f(B) = A, f(C) = C_1$ или $f(B) = C_1, f(C) = A$. В первом случае движение будет поворотом, а во втором — тем же поворотом с зеркальной либо осевой симметрией, переворачивающей треугольник.

Аналогично разбираются остальные пункты этой задачи.

40.2. Задача решается аналогично предыдущей. Разберём, например, п. «а». При этом полагаем, что куб переходит в себя. Возможны следующие случаи: $f(A)$ = C, $f(A_1) = C_1$ или наоборот. Первый случай реализуется поворотом вокруг оси куба, параллельной данным рёбрам, на 180° либо зеркальной симметрией относительно плоскости (BB_1D_1). Второй случай реализуется симметрией относительно оси, проходящей через середины рёбер BB_1 и DD_1, и центральной симметрией относительно центра куба.

40.3, **40.4.** Решение этих задач аналогично предыдущим.

40.5. Отложим векторы базисов от одной точки. Совместим движением первые векторы этих базисов (базис — упорядоченная тройка векторов). При этом пары других векторов совмещаются либо поворотом вокруг оси, проходящей через первый вектор, либо композицией указанного поворота и зеркальной симметрии, меняющей местами два остальных вектора базиса.

40.6. Этот вопрос рассмотрен в § 41 и в решении задачи **41.1.**

40.7. Фигура F_2 получается из фигуры F_1 композицией центральной, а затем зеркальной симметрий. Учитывая полученный в задаче **39.12** результат о представлении центральной симметрии в виде коммутативной композиции трёх зеркальных симметрий с перпендикулярными плоскостями, расположим эти плоскости так, чтобы последняя из них совпадала с плоскостью зеркальной симметрии. Результатом композиции будет осевая симметрия относительно оси, перпендикулярной плоскости зеркальной симметрии.

40.8. Если под неподвижными прямыми и плоскостями понимать прямые и плоскости, состоящие из неподвижных точек, задача тривиальна.

Рассмотрим решение задачи при условии, что неподвижной называется такая прямая (плоскость), которая при движении отображается на себя.

а) Да. Пусть прямая перешла в себя и при этом ни одна её точка не осталась неподвижной. Единственное такое движение прямой — перенос. Но движения, которые на данной прямой будут переносом, суть либо винтовое, либо скользящее отражения. У обоих этих движений нет неподвижных точек.

б) Да. Рассмотрения аналогичны рассмотрениям п. «а».

в) Нет. Например, при повороте не на 180° на плоскости, перпендикулярной оси поворота, неподвижной прямой нет.

г) Да. Достаточно рассмотреть движения, классифицированные по множеству неподвижных точек. Для поворотов и зеркальной симметрии утверждение очевидно. Случай для ровно одной неподвижной точки разобран в следующем параграфе.

д) Нет. Достаточно рассмотреть поворот, ось которого не лежит в неподвижных плоскостях, ей перпендикулярных.

40.9. Этот вопрос рассмотрен в тексте параграфа, а также в решениях задач **38.8** и **38.9.**

40.10. Считая чётность числа смен ориентации пространства, получаем, что род движения $f^{-1} \circ g \circ f$ такой же, как род движения g.

§41. Классификация движений пространства

В полном объёме изложить на уроке материал данного параграфа трудно, да и не нужно. Однако полезно познакомить учащихся с основными классификационными теоремами. Стоит обратить внимание на зеркальный поворот как специфически пространственное движение, аналога которому на плоскости нет. Вообще, если учащиеся изучали тему «Движения плоскости», полезно сопоставить пространственные классификационные теоремы с плоскими.

Задачи к § 41

Задачи **41.2—41.4** можно использовать для разминки на уроке, следующем за изучением § 41. Ответы на вопросы задач **41.5—41.7** содержатся в тексте параграфа. Эти задачи удобно использовать для контроля либо в качестве несложных упражнений сразу после изучения материала § 41.

Полезно обратить внимание учащихся на различные случаи расположения прямых и плоскостей в задаче **41.10.**

41.8. Винтовое движение есть композиция поворота и переноса на вектор, параллельный оси поворота. Перенос на вектор есть композиция зеркальных симметрий относительно плоскостей, перпендикулярных вектору переноса, т. е. перпендикулярных к оси поворота. Поворот есть композиция зеркальных симметрий относительно плоскостей, содержащих ось поворота. Тем самым плоскости и перпендикулярны плоскостям γ и δ, симметрией относительно которых получен перенос. Итак, данное винтовое движение $f = S_\gamma \circ S_\delta \circ S_\alpha \circ S_\beta$. При этом известно, что симметрии относительно перпендикулярных плоскостей коммутируют.

Поэтому $f = S_\gamma \circ S_\delta \circ S_\alpha \circ S_\beta$. Каждая пара последовательных зеркальных симметрий даёт осевую.

Ясно, что ни зеркальный поворот, ни скользящее отражение не раскладываются в композицию осевых симметрий, так как являются движениями второго рода.

41.9. При повороте вокруг P_1P_2 на 90° с последующей симметрией относительно плоскости (ABC) в каждом пункте соответствующие прямые и плоскости переходят в другие.

41.10. Разберём для примера случай винта (остальные случаи аналогичны). Если прямая a параллельна оси поворота, то её образ параллелен a. В противном случае образ будет скрещиваться с a (ситуация аналогична случаю поворота, так как перенос не изменяет взаимного расположения непересекающихся прямых).

41.11. Рассмотрим общий подход к решению указанной задачи. Так как все указанные фигуры имеют центры, оси и плоскости симметрии, то, переведя их в себя хоть как-нибудь, можно с помощью этих элементов симметрии добиться нужного рода движения. В случае движения второго рода с помощью композиции с нужным движением первого рода зеркальный поворот можно перевести в скользящее отражение или наоборот.

41.12. а) Она получена из правильной шестиугольной призмы отсечением плоскостями, проходящими через диагональ одного основания и вершину другого (рис. 103).

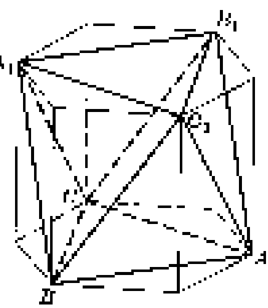

Рис. 103

б) Из описанного способа получения следует, что антипризма — выпуклый многогранник, так как лежит по одну сторону от плоскости любой из своих граней.

в) Да. Это рёбра треугольников основания (например, $AB \,||\, A_1B_1$) и боковые рёбра, соединяющие концы параллельных сторон основания (например, $AC_1 \,||\, C_1A_1$).

г) Заметим, что данная антипризма есть просто правильный октаэдр, у которого, разумеется, есть плоскости симметрии и центр симметрии.

Для доказательства достаточно показать, что ACA_1C_1 — квадрат. Но поскольку все рёбра пирамиды $BACA_1C_1$ равны, то вершина B проектируется в центр описанной окружности ромба основания, т. е. в основании пирамиды квадрат. Тем самым решён и п. «д».

41.13. Если проволока намотана подряд (виток к витку), то можно считать её длиной количество мотков (его можно найти как отношение H к толщине проволоки), умноженное на длину окружности основания.

Если же проволока намотана разреженно, нужно сосчитать количество мотков и для каждого из них воспользоваться формулой из текста.

41.14. Например, высота, *диаметр* винта и шаг винта (расстояние между двумя последовательными точками лестницы, находящимися одна над другой). Вместо шага винта можно рассмотреть крутизну (отношение шага к длине лестницы на одном полном обороте).

§ 42. Симметрия

Этот параграф является ключевым в мировоззренческом плане параграфом темы «Движения пространства», да и всего курса в целом. Показывается ведущее значение симметрии (в общем смысле этого слова) для самых различных отраслей знания. Учитель, увлечённый этой темой, может развить и дополнить содержание учебника для достижения большей эстетической направленности, демонстрации связи математики с окружающей действительностью. Можно провести вечер, конференцию, семинар с докладами учащихся, привлекая материал из живописи, литературы и т. д. Увлекательно изложенные дополнительные сведения можно прочесть в книгах: Гильберт Д. Наглядная геометрия / Д. Гильберт, Ц. Кон-Фоссен. — М.: Наука, 1981; Левитин К. Геометрическая рапсодия / К. Левитин. — М.: Знание, 1984.

Задачи к § 42

Задачи **42.1—42.4, 42.6—42.9** весьма просты и схожи с задачами **39.39, 39.52, 39.53.** Их можно использовать для устной разминки в начале урока. При этом полезно напомнить, что ограниченные тела не могут переходить в себя при скользящих отражениях и винтовых движениях с ненулевыми векторами переноса.

При обсуждении задач этого параграфа полезно обратиться к примерам групп не только геометрическим, но и алгебраическим. Заинтересованным школьникам можно рассказать о группах перестановок, в частности, показать, что группа симметрий тетраэдра есть группа перестановок четырёх элементов.

42.5. а) Тетраэдр, грани которого два равных симметричных неравнобедренных треугольника с общей стороной.

б) Такого тетраэдра нет. Если имеются две плоскости симметрии, то тетраэдр перейдет в себя и при повороте, полученном композицией этих симметрий.

в) По причине, аналогичной причине п. «б», такого тетраэдра также нет.

г) Рассмотрим два неперпендикулярных скрещивающихся отрезка, общий перпендикуляр которых проходит через их середины. Их концы будут вершинами искомого тетраэдра. Ясно, что можно подобрать их длины так, чтобы избавиться от «случайных» иных элементов симметрии, кроме осевой относительно их общего перпендикуляра.

д) Как показано в решении задачи **39.100,** оси симметрий должны пересекаться. При этом композицией любых двух из этих симметрий должна являться третья. Поэтому оси симметрий должны быть перпендикулярны. Ясно, что ось симметрии тетраэдра не может проходить через вершину, так как в противном случае остальные вершины не разобьются на пары симметричных. Поэтому оси симметрий должны менять местами пары вершин, т. е. являться серединными перпендикулярами противоположных рёбер тетраэдра. Итак, прямые, соединяющие середины противоположных рёбер, перпендикулярны. Это эквивалентно тому, что тетраэдр равногранный (по задаче **23.31**).

Ясно, что равногранный тетраэдр не имеет других элементов симметрии, если его грани — произвольные (неравнобедренные) треугольники.

42.10. Нет. Два правильных тетраэдра, как легко убедиться, можно совместить так, чтобы вершины совместились наперёд заданным образом. Следовательно, грани могут тоже совместиться любым наперёд заданным образом.

В случае с кубом будут существовать два разных. Если в одном кубе грань цвета 1 будет соседней с гранями цветов 2, 3, 4, 5, а в другом — с гранями цветов 2, 6, 7, 8, то совместить эти кубы с совпадением цветов граней не удастся.

42.11. Да. Рассмотрим шестиугольник, переходящий в себя только при поворотах вокруг некоторого центра на 120° и 240° (такой шестиугольник получается пристраиванием к сторонам равностороннего треугольника равных неравнобедренных треугольников). Построим пирамиду, вершина которой проектируется в центр поворотов. Тогда при поворотах вокруг высоты пирамиды на 120° и 240°, а также при тождественном движении пирамида перейдёт в себя. Покажем, что других самосовмещений у пирамиды нет. Действительно, при самосовмещениях основание должно перейти в себя, а значит, его центр останется неподвижен. Неподвижной останется и вершина пирамиды. Неподвижной будет и её высота, а это означает, что самосовмещение есть поворот вокруг этой высоты.

42.12. а) Из условия следует, что у четырёхугольника в основании равны противоположные стороны и его можно вписать в окружность. Это значит, что четырёхугольник — равнобочная трапеция либо прямоугольник. В первом случае будет только зеркальная симметрия относительно плоскости, проходящей через вершину и ось симметрии трапеции, а во втором — две такие же зеркальные симметрии и одна осевая относительно высоты пирамиды.

б) Из условия следует, что в основании ромб. Поэтому элементами симметрии будут являться две зеркальные симметрии относительно плоскостей, проходящих через вершину и диагонали ромба, а также осевая симметрия относительно высоты пирамиды.

Нетрудно видеть, что пирамида п. «б» получается из пирамиды п. «а» с прямоугольным основанием, если соединить вершину с серединами сторон основания.

42.13. Для тех, кто знает начала теории групп, задача тривиальна. В каждый правильный многогранник можно вписать правильный тетраэдр (точнее, вершины либо центры граней каждого можно разбить на четвёрки, являющиеся вершинами правильных тетраэдров). Тогда в группе самосовмещений многогранника есть подгруппа самосовмещений правильного тетраэдра. По известной теореме Лагранжа количество элементов группы делится на количество элементов подгруппы. Нетрудно подсчитать, что в группе самосовмещений тетраэдра 24 элемента. Поэтому число самосовмещений каждого правильного многогранника делится на 24.

Искомая же связь, которая может быть доказана непосредственным перебором, такова: число элементов группы самосовмещений равно удвоенному количеству плоских углов правильного многогранника.

42.12. а) Да. б) Нет, так как композиция движений второго рода есть движение первого рода. Кроме того, тождественное движение не есть движение первого рода, в) Да. г) Да. д) Нет.

42.15. а) Нет. Композиция двух таких симметрий не является зеркальной симметрией.

б) Нет. Нетрудно показать разложением осевых симметрий в композицию зеркальных с общей плоскостью, что композиция двух осевых симметрий относительно осей, проходящих через центры противоположных граней, есть поворот вокруг диагонали куба на 120°.

в) Да. Композиция двух поворотов есть движение первого рода. При этом всякое самосовмещение куба имеет неподвижную точку — центр куба. Поэтому если это движение первого рода, то поворот. Итак, композиция двух поворотов — поворот. Нетрудно видеть, что обратное повороту движение тоже поворот и что тождественное движение можно считать поворотом.

42.16. а) Нет. По причинам, аналогичным изложенным в предыдущей задаче.

б) Да. У тетраэдра три взаимно перпендикулярные оси симметрии. Поэтому композиция двух симметрий относительно этих осей будет третьей симметрией. Обратной к симметрии является она сама. Если к этим симметриям добавить тождественное преобразование, то получится группа преобразований.

в) Ответ утвердительный по причинам, аналогичным изложенным в предыдущей задаче.

42.17. Множество движений первого рода образует группу.

Завершая обзор главы «Преобразования», отметим некоторые особенности.

1. Для лучшего усвоения информации можно дать примерный план рассказа о движении:

1) определения;

2) способы задания (какие и сколько элементов требуется для задания движения);

3) характеристические свойства движения;

4) неподвижные точки, инвариантные прямые и плоскости;

5) обратное движение. Композиции указанных движений между собой и с другими движениями;

6) примеры фигур, переводимых данным движением в себя.

2. С учетом теоретической направленности данной главы полезно в конце прохождения провести теоретический зачёт.

Мы не приводим календарного плана прохождения темы «Движения», поскольку он очень зависит от предыдущей математической подготовки школьников, наличия времени, уровня класса и т. д.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ IX

IX.1. Пункты «а» и «б» тривиальны. в) Обозначим куб через $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Рассмотрим пирамиду CA_1B_1BA и заметим, что при поворотах вокруг диагонали A_1C на 120° и 240° образы этой пирамиды заполняют весь куб, не пересекаясь внутренностями. Они вместе с исходной пирамидой дают требуемое разбиение.

Остальные пункты этой задачи тривиальны и сводятся к разбиению квадрата на 4 или 6 равновеликих треугольников или 5 равновеликих прямоугольников.

IX.2. Если призма $ABCA_1B_1C_1$, искомыми тетраэдрами будут A_1ABC, $BA_1B_1C_1$, A_1BCC_1.

После знакомства с § 43 нетрудно понять, что условие о том, что призма прямая, излишне.

IX.3. Перевести аффинным преобразованием в куб и воспользоваться результатами задачи **IX.1.**

IX.4. Одна восьмая часть и объёма, и поверхности, так как шар делится на 8 частей, равных исходной.

IX.5. Пусть a, b, c, d — исходные прямые. Тогда для движения возможны два случая: $f(a) = c, f(b) = d$ или наоборот. Дальнейшее решение аналогично решению задач **40.1—40.4.**

IX.6. Разберем п. «а» (п. «б» абсолютно аналогичен). Ясно, что плоскости граней вписанного правильного тетраэдра разбивают поверхность описанного шара на 4 криволинейных равных треугольника и на 6 равных двуугольников. Площади указанных фигур найдём по следующему плану: 1) вычислим площадь сферического сегмента (как часть площади всей сферы), отсечённого плоскостью грани тетраэдра (она равна трети площади сферы); 2) сложим площади этих сегментов; 3) вычисляем излишек суммарной площади (он равен трети площади сферы). Этот излишек возникает при наложении сферических сегментов по шести двуугольникам. Таким образом, площадь каждого двуугольника есть восемнадцатая часть площади сферы, а площадь сферических треугольников равна площади сферического сегмента минус площадь трёх двуугольников, т. е. шестая часть площади сферы.

IX.7. а) Получив объём пересечения, нетрудно получить объём объединения указанных тетраэдров. Пересечение представляет собой две треугольные пирамиды с общим основанием — равносторонним треугольником со стороной 0,5. Суммарная высота равна высоте тетраэдра. Таким образом, объём пересечения равен четверти объёма исходного тетраэдра. Объединение имеет объём, равный 1,75 объёма исходного тетраэдра.

б) В пересечении получится параллелепипед (рис. 104). При вычислении объёма можно использовать, например, что рёбра одного тетраэдра пересекают грани другого в центрах тяжести. Ответ: объём пересечения равен $\frac{2}{9}$ объёма исходного тетраэдра.

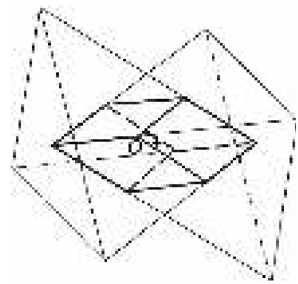

Рис. 104

IX.8. При решении обоих пунктов полезно найти такие сечения, перпендикулярные оси поворота, которые при указанном повороте переходят в себя или изменяются предсказуемым образом.

а) Сечения $PQRS$ и $P_1Q_1R_1S_1$ суть квадраты, переходящие при повороте в себя. Ясно, что пересечение представляет собой многогранник $MPQRSP_1Q_1R_1S_1M_1$ (рис. 105). Его объём можно вычислить без труда, он равен $\sqrt{2} - \frac{2}{3}$.

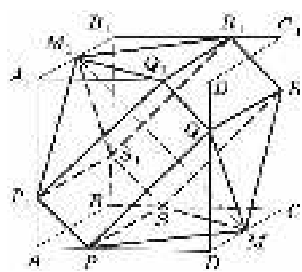

Рис. 105

б) Решение аналогично решению п. «а».

IX.9. а) Нужно отразить точку B в плоскости α в точку B'. Точка пересечения отрезка AB' и плоскости α искомая, так как лишь в этом случае ломаная AKB', равная по длине ломаной $AKБ$, выпрямляется в отрезок.

б) Ясно, что K и L должны лежать в плоскости ABB'. Дальнейшее рассуждение повторяет п. «а» с применением не симметрии, а скользящего отражения с вектором переноса $\overrightarrow{KL}$.

IX.10. Так как при симметрии относительно этой оси и плоскость, и тетраэдр переходят в себя, в сечении получается четырёхугольник (иногда треугольник как вырожденный случай), который имеет ось симметрии (дельтоид). Его площадь равна полупроизведению диагоналей. Так как одна из диагоналей постоянна, то площадь пропорциональна другой диагонали. Тем самым наибольшее значение площади будет, когда сечение треугольное, т. е. проходит через ребро, а наименьшее — когда сечение квадратное, т. е. проходит через другую ось симметрии

IX.11. Эта ломаная переходит в себя при осевой симметрии относительно прямой, проходящей через середины отрезков *AB* и *CD*.

IX.12. Многогранник, в котором равны грани ребра и все двугранные углы, является правильным, так как из равенства двугранных углов следует равенство плоских. Двугранные углы равны, так как они самосовмещаются.

IX.13. Композиция двух симметрий относительно пересекающихся плоскостей есть поворот. Так как по условию плоскости могут быть любыми проходящими через данную прямую, то фигура переходит в себя при любом повороте вокруг этой прямой.

IX.14. В центроид. Центроид описывается линейным равенством на векторы, а такое равенство при движении сохраняется.

IX.15. а) Нет. б) Нет. Соответствующие примеры см. в **42.5.**

IX.16. Точки совпадают. Это следует из их единственности и того, что при движении все они сохраняются. В силу этих же причин они лежат на оси симметрии и в плоскости симметрии. См. также решение задач **39.93, 39.97, 39.104.**

IX.17. Рассмотрим для примера п. «а». Композиция двух центральных симметрий есть перенос, так как сохраняется направление векторов. Композиция переноса и центральной симметрии есть центральная симметрия, так как направление векторов меняется на противоположное. См. также решение задачи **39.12.**

Можно решать все эти задачи разложением движения в композицию подходящим образом подобранных зеркальных симметрий.

IX.18. Они параллельны. Иначе композиция винтового движения и симметрии не будет переносом.

IX.19. а) Центральная симметрия.

б) Зеркальный поворот. Прежде всего отметим, что это движение меняет ориентацию базиса из векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, поэтому является движением второго рода. Так как оно переводит тетраэдр *ABCD* в себя, то не может являться скользящим отражением.

IX.20. Как показано в решении задачи **39.100,** оси поворота любого ограниченного тела либо лежат в одной плоскости, либо имеют общую точку. Так как композиция зеркальных симметрий относительно пересекающихся плоскостей — поворот, при котором тело переходит в себя, то все указанные плоскости проходят через одну точку. Но тогда те из них, которые параллельны какой-либо прямой, имеют общую прямую. Тогда фигура имеет ось вращения, параллельную любой прямой пространства. Используя результат задачи **39.105,** получим, что тело является шаром.

IX.21. Воспользуемся для доказательства следующим критерием: четыре точки B_1, B_2, B_3, B_4, лежащие соответственно на рёбрах A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 замкнутой неплоской четырёхзвенной ломаной $A_1A_2A_3A_4$, лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда

$$\frac{\left|A_1 B\right|_1 \cdot \left|A_2 B_2\right| \cdot \left|A_3 B_3\right| \cdot \left|A_4 B_4\right|}{\left|B_1 A_2\right| \cdot \left|B_2 A_3\right| \cdot \left|B_3 A_4\right| \cdot \left|B_4 A_1\right|} = 1.$$ Этот критерий получается, например, если применить теорему Менелая в треугольниках $A_1A_2A_3$ и $A_1A_4A_3$ для прямых B_2B_1 и B_4B_3 соответственно.

Спроектируем ломаную на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра, вдоль его образующей. Она перейдет в четырёхугольник, описанный около окружности, причём точки касания ломаной с цилиндром перейдут в точки касания четырёхугольника с окружностью. При этом отношение, указанное в критерии, сохранится как произведение четырёх отношений коллинеарных отрезков. Для описанного четырёхугольника указанное отношение, очевидно, равно 1.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ЗАКЛЮЧЕНИЮ «СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

Материал заключения в корне не характерен для школьного учебника. Впрочем, и в вузовских учебниках по геометрии он затрагивается мало. Однако этот материал незаменим для развития учащихся, знакомства их с понятиями и методами более или менее современной геометрии.

Естественно, что стиль изложения заключения отличается от стиля основной части учебника. Это связано как со сложностью предлагаемого материала, так и с другой его направленностью. Материал главы не оказывает школьнику помощи в решении задач (их здесь и нет). Он помогает формированию неких мировоззренческих ценностей, способствует пониманию места геометрии (да и вообще математики) в науке и жизни.

Ясно, что программа не предусматривает изучения тем, затронутых в заключении. Однако при наличии времени и желания учителя по этому материалу можно провести интересные уроки, которые учащиеся запомнят навсегда. Форма этих уроков может быть самой разной — урок-лекция, урок-семинар, сообщения учащихся, совместные размышления и обобщения и т. д.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная книга представляет собой пособие для учителя, работающего в школах и классах с углублённым теоретическим и практическим изучением математики. Обучающиеся в этих классах обладают, как правило, не только большими математическими способностями, но и высоким уровнем общего развития. Учитель, работающий по учебнику А. Д. Александрова, А. Л. Вернера, В. И. Рыжика «Геометрия. 11 класс», не может не заметить, что этот учебник не только даёт качественную математическую информацию, но и развивает ученика во многих необходимых направлениях. Главное из них — осознание геометрии как науки со своим специфическим методом познания мира, со своей незаменимой ролью в жизни отдельного человека и общества в целом (развитие пространственного мышления, умения «думать геометрически», воспитание потребности мыслить, говорить честно, обоснованно, последовательно). Однако не менее важно, что в этой книге решаются серьёзные методические и педагогические проблемы. Работая по этому учебнику, школьник учится в «условиях, максимально приближенных к действительности»: проблемность, вариативность, отсутствие натаскивания, обучение обобщению, сравнению, переносу знаний, культуре мышления и разговора, межпредметная связь, неформальная связь с практикой. Эти особенности выгодно отличают учебник от других и, в конечном итоге, побуждают ученика к самостоятельности суждений и поступков, к творчеству.

Цель данной книги — облегчить учителю осознание особенностей геометрии и, раскрывая перед ним богатство возможностей учебника, показать многие (но, конечно, не все) пути работы с ним. Для этого авторы делятся и своим личным опытом преподавания геометрии.

Очень хотелось бы, чтобы советы из этой книги вместе с личными находками и достижениями каждого учителя помогли бы ему в работе, его стремлении сделать все возможное для развития школьников, их интеллекта, их творческих возможностей, повлиять должным образом на желание наших учеников стать хорошими людьми.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРИМЕРНАЯ РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

ГЕОМЕТРИЯ

10—11 классы

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Рабочие программы базового и углублённого уровней по геометрии для среднего общего образования разработаны на основе Фундаментального ядра общего образования и в соответствии с требованиями ФГОС к структуре и результатам освоения основных образовательных программ среднего общего образования. В них соблюдаются преемственность с примерной рабочей программой основного общего образования. Примерные рабочие программы (далее — Программы) являются ориентиром для составления рабочих программ для конкретных классов.

Программы содержат:

1) пояснительную записку, в которой конкретизируются общие цели среднего (полного) общего образования с учётом специфики учебного предмета геометрии;

2) описание места предмета в учебном плане;

3) планируемые результаты освоения курса геометрии;

4) содержание курса геометрии на базовом и углублённом уровнях;

5) примерное тематическое планирование с определением основных видов учебной деятельности обучающихся;

Практическая значимость школьного курса геометрии обусловлена тем, что её объектом являются пространственные формы и количественные отношения действительного мира. Геометрическая подготовка необходима для понимания принципов устройства и использования современной техники, восприятия научных и технических понятий и идей. Математика является языком науки и техники. С её помощью моделируются и изучаются явления и процессы, происходящие в природе.

Геометрия является одним из опорных предметов старшей школы: она обеспечивает изучение других дисциплин. В первую очередь это относится к предметам естественно-научного цикла, в частности к физике. Развитие логического мышления учащихся при обучении геометрии способствует усвоению предметов гуманитарного цикла. Практические умения и навыки геометрического характера необходимы для трудовой и профессиональной подготовки школьников.

Развитие у учащихся правильных представлений о сущности и происхождении геометрических абстракций, соотношении реального и идеального, характере отражения математической наукой явлений и процессов реального мира, месте геометрии в системе наук и роли математического моделирования в научном познании и в практике способствует формированию научного мировоззрения учащихся, а также формированию качеств мышления, необходимых для адаптации в современном информационном обществе.

Требуя от учащихся умственных и волевых усилий, концентрации внимания, активности развитого воображения, геометрия развивает нравственные черты личности (настойчивость, целеустремлённость, творческую активность, самостоятельность, ответственность, трудолюбие, дисциплину и критичность мышления) и умение аргументированно отстаивать свои взгляды и убеждения, а также способность принимать самостоятельные решения.

Геометрия существенно расширяет кругозор учащихся, знакомя их с индукцией и дедукцией, обобщением и конкретизацией, анализом и синтезом, классификацией и систематизацией, абстрагированием, аналогией. Активное использование задач на всех этапах учебного процесса развивает творческие способности школьников.

При обучении геометрии формируются умения и навыки умственного труда — планирование своей работы, поиск рациональных путей её выполнения, критическая оценка результатов. В процессе обучения геометрии школьники должны научиться излагать свои мысли ясно и исчерпывающе, лаконично и ёмко, приобрести навыки чёткого, аккуратного и грамотного выполнения математических записей.

Важнейшей задачей преподавания школьного курса геометрии является развитие логического мышления учащихся. Сами объекты геометрических умозаключений и принятые в геометрии правила их конструирования способствуют формированию умений обосновывать и доказывать суждения, приводить чёткие определения, развивают логическую интуицию, кратко и наглядно вскрывают механизм логических построений и учат их применению. Тем самым геометрия занимает ведущее место в формировании научно-теоретического мышления школьников. Раскрывая внутреннюю гармонию математики, формируя понимание красоты и изящества математических рассуждений, способствуя восприятию геометрических форм, усвоению понятия симметрии, геометрия вносит значительный вклад в эстетическое воспитание учащихся. Её изучение развивает воображение школьников, существенно обогащает и развивает их пространственные представления.

Геометрическое образование является обязательной и неотъемлемой частью общего образования на всех его ступенях. Изучение курса геометрии на **базовом уровне** ставит своей целью повысить общекультурный уровень человека и завершить формирование относительно целостной системы геометрических знаний как основы любой профессиональной деятельности, не связанной непосредственно с математикой.

На **углублённом уровне** в зависимости от потребностей обучающихся возможно изучение курса геометрии на двух уровнях: для подготовки специалистов инженерно-технического профиля и кадров для нужд науки.

В соответствии с принятой Концепцией развития математического образования в Российской Федерации математическое образование должно решать, в частности, следующие ключевые задачи:

— предоставлять каждому обучающемуся возможность достижения уровня математических знаний, необходимого для дальнейшей успешной жизни в обществе;

— обеспечивать необходимое стране число выпускников, математическая подготовка которых достаточна для продолжения образования в различных направлениях и для практической деятельности, включая преподавание математики, математические исследования, работу в сфере информационных технологий и др.;
— в основном общем и среднем общем образовании необходимо предусмотреть подготовку обучающихся в соответствии с их запросами к уровню подготовки в сфере математического образования.

Соответственно выделяются три направления требований к результатам математического образования:

1. Практико-ориентированное математическое образование (математика для жизни).

2. Математика для использования в профессии, не связанной с математикой.

3. Творческое направление, на которое нацелены те обучающиеся, которые планируют заниматься творческой и исследовательской работой в области математики, физики, экономики и других областях.

В соответствии с Законом об образовании РФ (ст. 12 п. 7) организации, осуществляющие образовательную деятельность, реализуют эти требования в образовательном процессе с учётом примерной основной образовательной программы как на основе учебно-методических комплектов соответствующего уровня, входящих в Федеральный перечень МОиН РФ, так и с возможным использованием иных источников учебной информации (учебно-методические пособия, образовательные порталы и сайты и др.).

В соответствии с требованиями в программах выделены два уровня: **базовый** и **углублённый.**

Цели освоения программы базового уровня — обеспечение возможности использования математических знаний и умений в повседневной жизни и возможности успешного продолжения образования по специальностям, не связанным с прикладным использованием математики.

Программа углублённого уровня предназначена для профильного изучения математики; при выполнении этой программы предъявляются требования, соответствующие направлению «математика для профессиональной деятельности»; вместе с тем выпускник получает возможность изучить математику на гораздо более высоком уровне, что создаст фундамент для дальнейшего серьёзного изучения математики в вузе.

Общая характеристика учебного предмета. Геометрическое образование играет важную роль и в практической, и в духовной жизни общества. Практическая сторона связана с созданием и применением инструментария, необходимого человеку в его продуктивной деятельности, духовная сторона — с интеллектуальным развитием человека, формированием характера и общей культуры.

Без конкретных геометрических знаний затруднены восприятие и интерпретация окружающего мира, малоэффективна повседневная практическая деятельность. Каждому человеку в своей жизни приходится выполнять расчёты, владеть практическими приёмами геометрических измерений и построений, читать информацию, представленную в виде чертежей, составлять несложные алгоритмы и др.

Для жизни в современном обществе важным является формирование математического стиля мышления. Объекты математических умозаключений и правила их конструирования вскрывают механизм логических построений, вырабатывают умения формулировать, обосновывать и доказывать суждения, тем самым развивают логическое мышление. Геометрии принадлежит ведущая роль в формировании алгоритмического мышления, развитии умений действовать по заданному алгоритму. В ходе решения задач — основной учебной деятельности на уроках геометрии — развиваются творческая и прикладная стороны мышления.

Обучение геометрии даёт возможность развивать у учащихся точную, экономную и информативную речь, умение отбирать наиболее подходящие языковые (в частности, символические, графические) средства.

Геометрическое образование вносит свой вклад в формирование общей культуры человека. Необходимым компонентом общей культуры является общее знакомство с методами познания действительности, представление о методах математики, их отличиях от методов естественных и гуманитарных наук, об особенностях применения геометрии для решения прикладных задач.

Изучение геометрии способствует эстетическому воспитанию человека, пониманию красоты и изящества математических рассуждений, восприятию геометрических форм, усвоению идеи симметрии.

История развития геометрии даёт возможность пополнить запас историко-научных знаний школьников, сформировать у них представления о геометрии как части общечеловеческой культуры. Знакомство с основными историческими вехами возникновения и развития этой науки, судьбами великих открытий, именами людей, творивших науку, должно войти в интеллектуальный багаж каждого культурного человека.

Содержание геометрического образования формируется на основе Фундаментального ядра школьного математического образования. Оно представлено в виде совокупности содержательных линий, раскрывающих наполнение Фундаментального ядра школьного математического образования применительно к старшей школе:

МЕСТО ПРЕДМЕТА В УЧЕБНОМ ПЛАНЕ

Базисный учебный (образовательный) план для изучения предмета «Математика» отводит на базовом уровне от 4 учебных часов в неделю и на углублённом уровне 6 или 8 часов в неделю в 10—11 классах. Поэтому на геометрию отводится 1,5 учебных часа в неделю в течение каждого года обучения для базового уровня, всего 102 урока и 2 или 3 учебных часа для углублённого уровня, всего 136 или 204 урока соответственно. Распределение учебного времени представлено в таблице.

Предмет	Количество часов					
	Базовый уровень		Углублённый уровень			
			1-й вариант		2-й вариант	
	10 класс	11 класс	10 класс	11 класс	10 класс	11 класс
Математика (интегрированный курс)	136	136				
Геометрия	51	51	68	68	102	102
Алгебра и начала математического анализа	85	85	136	136	180	180

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ КУРСА

Углублённый уровень

Для успешного продолжения образования по специальностям, связанным с прикладным использованием математики (1-й уровень планируемых результатов), выпускник **научится,** а также **получит возможность научиться** для обеспечения возможности успешного продолжения образования по специальностям, связанным с осуществлением научной и исследовательской деятельности в области математики и смежных наук (2-й уровень планируемых результатов, выделено *курсивом*):

Геометрия

— владеть геометрическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
— самостоятельно формулировать определения геометрических фигур, выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках геометрических фигур и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новые классы фигур, проводить в несложных

случаях классификацию фигур по различным основаниям;

— исследовать чертежи, включая комбинации фигур, извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную на чертежах;
— решать задачи геометрического содержания, в том числе в ситуациях, когда алгоритм решения не следует явно из условия, выполнять необходимые для решения задачи дополнительные построения, исследовать возможность применения теорем и формул для решения задач;
— уметь формулировать и доказывать геометрические утверждения;
— владеть понятиями стереометрии: призма, параллелепипед, пирамида, тетраэдр;
— иметь представления об аксиомах стереометрии и следствий из них и уметь применять их при решении задач;
— уметь строить сечения многогранников с использованием различных методов, в том числе метода следов;
— иметь представление о скрещивающихся прямых в пространстве и уметь находить угол и расстояние между ними;
— применять теоремы о параллельности прямых и плоскостей в пространстве при решении задач;
— уметь применять параллельное проектирование для изображения фигур;
— уметь применять перпендикулярности прямой и плоскости при решении задач;
— владеть понятиями ортогональное проектирование, наклонные и их проекции, уметь применять теорему о трёх перпендикулярах при решении задач;
— владеть понятиями расстояние между фигурами в пространстве, общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых и уметь применять их при решении задач;
— владеть понятием угол между прямой и плоскостью и уметь применять его при решении задач;

— владеть понятиями двугранный угол, угол между плоскостями, перпендикулярные плоскости и уметь применять их при решении задач;
— владеть понятиями призма, параллелепипед и применять свойства параллелепипеда при решении задач;
— владеть понятием прямоугольный параллелепипед и применять его при решении задач;
— владеть понятиями пирамида, виды пирамид, элементы правильной пирамиды и уметь применять их при решении задач;
— *иметь представление о теореме Эйлера,* правильных многогранниках;
— владеть понятием площади поверхностей многогранников и уметь применять его при решении задач;
— владеть понятиями тела вращения, сечения цилиндра, конуса, шара и сферы и уметь применять их при решении задач;
— владеть понятием касательные прямые и плоскости и уметь применять его при решении задач;
— иметь представления о вписанных и описанных сферах и уметь применять их при решении задач;
— владеть понятиями объём, объёмы многогранников, тел вращения и применять их при решении задач;
— иметь представление о развёртке цилиндра и конуса, площади поверхности цилиндра и конуса и уметь применять его при решении задач;
— иметь представление о площади сферы и уметь применять его при решении задач;
— уметь решать задачи на комбинации многогранников и тел вращения;
— иметь представление о подобии в пространстве и уметь решать задачи на отношение объёмов и площадей поверхностей подобных фигур;
— *иметь представление об аксиоматическом методе;*
— *владеть понятием геометрические места точек в пространстве и уметь применять его для решения задач;*

- *уметь применять для решения задач свойства плоских и двугранных углов трёхгранного угла, теоремы косинусов и синусов для трёхгранного угла;*
- *владеть понятием перпендикулярное сечение призмы и уметь применять его при решении задач;*
- *иметь представление о двойственности правильных многогранников;*
- *владеть понятиями центральное проектирование и параллельное проектирование и применять их при построении сечений многогранников методом проекций;*
- *иметь представление о развёртке многогранника и кратчайшем пути на поверхности многогранника;*
- *иметь представление о конических сечениях;*
- *иметь представление о касающихся сферах и комбинации тел вращения и уметь применять его при решении задач;*
- *применять при решении задач формулу расстояния от точки до плоскости;*
- *владеть разными способами задания прямой уравнениями и уметь применять их при решении задач;*
- *применять при решении задач и доказательстве теорем векторный метод и метод координат;*
- *иметь представление об аксиомах объёма, применять формулы объёмов прямоугольного параллелепипеда, призмы и пирамиды, тетраэдра при решении задач;*
- *применять теоремы об отношениях объёмов при решении задач;*
- *применять интеграл для вычисления объёмов и поверхностей тел вращения, вычисления площади сферического пояса и объёма шарового слоя;*
- *иметь представление о движениях в пространстве: параллельном переносе, симметрии относительно плоскости, центральной симметрии, повороте относительно прямой, винтовой симметрии — и уметь применять его при решении задач;*

— *иметь представление о площади ортогональной проекции;*
— *иметь представление о трёхгранном и многогранном угле и применять свойства плоских углов многогранного угла при решении задач;*
— *иметь представления о преобразовании подобия, гомотетии и уметь применять их при решении задач; уметь решать задачи на плоскости методами стереометрии;*
— *уметь применять формулы объёмов при решении задач.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

— составлять с использованием свойств геометрических фигур математические модели для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин, исследовать полученные модели и интерпретировать результат.

Векторы и координаты в пространстве

— Владеть понятиями векторы и их координаты;
— уметь выполнять операции над векторами;
— использовать скалярное произведение векторов при решении задач;
— применять уравнение плоскости, формулу расстояния между точками, уравнение сферы при решении задач;
— применять векторы и метод координат в пространстве при решении задач;
— *находить объём параллелепипеда и тетраэдра, заданных координатами своих вершин;*
— *задавать прямую в пространстве;*
— *находить расстояние от точки до плоскости в системе координат;*
— *находить расстояние между скрещивающимися прямыми, заданными в системе координат.*

История и методы математики

- Иметь представление о вкладе выдающихся математиков в развитие науки;
- понимать роль математики в развитии России;
- использовать основные методы доказательства, проводить доказательство и выполнять опровержение;
- применять основные методы решения математических задач;
- на основе математических закономерностей в природе характеризовать красоту и совершенство окружающего мира и произведений искусства;
- применять простейшие программные средства и электронно-коммуникационные системы при решении математических задач;
- пользоваться прикладными программами и программами символьных вычислений для исследования математических объектов;
- *применять математические знания к исследованию окружающего мира (моделирование физических процессов, задачи экономики).*

СОДЕРЖАНИЕ

Углублённый уровень

Геометрия

Основные понятия геометрии в пространстве. Аксиомы стереометрии и следствия из них. *Понятие об аксиоматическом методе.*

Построение сечений многогранников методом следов. Центральное проектирование. Построение сечений многогранников методом проекций. *Теорема Менелая для тетраэдра*.

Скрещивающиеся прямые в пространстве. Угол между ними. Теоремы о параллельности прямых и плоскостей в пространстве. Параллельное проектирование и изображение фигур. *Геометрические места точек в пространстве.*

Перпендикулярность прямой и плоскости. Ортогональное проектирование. Наклонные и проекции. Теорема о трёх перпендикулярах. Расстояния между фигурами в пространстве. Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых. *Методы нахождения расстояний между скрещивающимися прямыми.*

Углы в пространстве. Перпендикулярные плоскости. *Трёхгранный и многогранный углы. Свойства плоских углов многогранного угла. Свойства плоских и двугранных углов трёхгранного угла. Теоремы косинусов и синусов для трёхгранного угла.*

Виды многогранников. Правильные многогранники. *Развёртки многогранника. Кратчайшие пути на поверхности многогранника. Теорема Эйлера. Двойственность правильных многогранников.*

Призма. Параллелепипед. Свойства параллелепипеда. Прямоугольный параллелепипед. Наклонные призмы. *Площадь ортогональной проекции. Перпендикулярное сечение призмы.*

Пирамида. Виды пирамид. Элементы правильной пирамиды. Пирамиды с равнонаклонёнными рёбрами и гранями, их основные свойства. *Виды тетраэдров. Ортоцентрический тетраэдр, каркасный тетраэдр, равногранный тетраэдр. Прямоугольный тетраэдр. Медианы и бимедианы тетраэдра. Достраивание тетраэдра до параллелепипеда.*

Тела вращения: цилиндр, конус, шар и сфера. Сечения цилиндра, конуса и шара. Шаровой сегмент, шаровой слой, шаровой сектор (конус). Усечённая пирамида и усечённый конус.

Касательные прямые и плоскости. Вписанные и описанные сферы. *Касающиеся сферы. Комбинации тел вращения. Элементы сферической геометрии. Конические сечения.*

Площади поверхностей многогранников. *Развёртка цилиндра и конуса.* Площадь поверхности цилиндра и конуса. Площадь сферы. *Площадь сферического пояса. Объём шарового слоя.*

Понятие объёма. Объёмы многогранников. Объёмы тел вращения. *Аксиомы объёма. Вывод формул объёмов прямоугольного параллелепипеда, призмы и пирамиды. Формулы для нахождения объёма тетраэдра. Теоремы об отношениях объёмов. Приложения интеграла к вычислению объёмов и поверхностей тел вращения.*

Комбинации многогранников и тел вращения.

Подобие в пространстве. Отношение объёмов и площадей поверхностей подобных фигур. *Преобразование подобия, гомотетия. Решение задач на плоскости с использованием стереометрических методов.*

Движения в пространстве: параллельный перенос, симметрия относительно плоскости, центральная симметрия, поворот относительно прямой.

Векторы и координаты в пространстве

Векторы и координаты. Сумма векторов, умножение вектора на число. Угол между векторами. Скалярное произведение.

Уравнение плоскости. Формула расстояния между точками. Уравнение сферы. *Формула расстояния от точки до плоскости. Способы задания прямой уравнениями.*

Решение задач и доказательство теорем с помощью векторов и методом координат. Элементы геометрии масс.

ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Тематическое планирование реализует один из возможных подходов к распределению изучаемого материала по учебно-методическим комплектам по геометрии, выпускаемым издательством «Просвещение», не носит обязательного характера и не исключает возможностей иного распределения содержания.

В примерном тематическом планировании разделы основного содержания по геометрии разбиты на темы в хронологии их изучения по соответствующим учебникам.

Особенностью примерного тематического планирования является то, что в нём содержится описание возможных видов деятельности учащихся в процессе усвоения соответствующего содержания, направленных на достижение поставленных целей обучения. Это ориентирует учителя на усиление деятельностного подхода в обучении, организацию разнообразной учебной деятельности, отвечающей современным психолого-педагогическим воззрениям, использование современных технологий.

Перечень учебных действий ученика не носит нормативного характера, его не следует рассматривать в качестве требований ни к учителю, ни к ученику.

Следует также обратить внимание на то, что характеристика учебных действий ученика в предлагаемом тематическом планировании относится к предметной области. Универсальные учебные действия конкретизированы в «Программе развития и формирования универсальных учебных действий».

Планирование по геометрии к каждому учебнику представлено в нескольких вариантах в соответствии с базисным учебным планом.

Базовый уровень: 1,5 ч в неделю, всего 54 ч в год;

углублённый уровень: 2 ч в неделю, всего 68 ч в год и 3 ч в неделю, всего 102 ч в год.

Углублённый уровень (3 ч в неделю)

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
10 класс			
Введение		**1**	
Глава I. Основания стереометрии		**18**	
1	Аксиомы стереометрии (и повторение основных теорем о треугольниках, п. 20.1)	6	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Уметь анализировать приведённое решение задачи. Доказывать простейшие следствия из аксиоматики. Рисовать простейшие фигуры, их сечений. Мысленно оперировать пространственными фигурами. Наблюдать за приведёнными рисунками и делать их анализ. Планировать решение задачи. Вычислять длины. Находить границы величин. Исследовать возможность получения результата при варьировании данных. Практически применять полученные знания. Рассуждать о фактах геометрии. Изучить понятие величины. Оценивать полученные знания и результаты деятельности
2	Способы задания прямых и плоскостей в пространстве	2	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Наблюдать за приведёнными рисунками и делать их анализ. Рисовать простейшие фигуры, их сечения. Мысленно оперировать пространственными фигурами. Доказывать утверждения о взаимном располо-

			жении прямых и плоскостей. Исследовать возможность получения результата при варьировании данных. Практически применять полученные знания. Оценивать полученные знания и результаты деятельности
3	Взаимное расположение прямых в пространстве	3	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Мысленно оперировать пространственными образами. Доказывать признаки скрещивающихся прямых, свойства и признаки параллельных прямых. Исследовать возможности получения результата при варьировании данных. Рассуждать о фактах геометрии. Оценивать полученные знания и результаты деятельности
4	Параллельное проектирование	2	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Доказывать свойства параллельного проектирования. Использовать инварианты параллельного проектирования для решения задач. Наблюдать за приведёнными рисунками и делать их анализ. Рисовать в параллельной проекции основные фигуры. Исследовать возможность получения результата при варьировании данных. Оценивать полученные знания и результаты деятельности. Уметь находить в Интернете сведения о творчестве М. Эшера
5	Существование и единственность. Построения	2	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Выделять из формулировок доказанных ранее теорем утверждения о существовании и утверждения о един-

			ственности. Понимать независимость этих утверждений. Решать задачи на построение в пространстве. Понимать разницу в решении задач на построение на плоскости и в пространстве. Рисовать фигуры с заданными свойствами. Доказывать существование определённого вида пирамид и призм. Исследовать возможности получения результата при варьировании данных. Рассуждать о фактах геометрии. Оценивать полученные знания и результаты деятельности
6	Об аксиомах	1	Изучить аксиомы планиметрии. Оценивать полученные знания. Уметь находить в Интернете сведения об аксиоматическом методе
	Решение задач	1	
	Контрольная работа № 1	1	
Глава II. Перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей		**24**	
7	Перпендикулярность прямой и плоскости	8	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Доказывать единственность перпендикуляра и его характерное свойство быть кратчайшим отрезком от точки до плоскости. Доказывать разными способами признак перпендикулярности прямой и плоскости. Доказывать утверждения, вытекающие из перпендикулярности прямой и плоскости. Строить фигуры как множества точек. Рисовать перпендикуляр из заданной точки многогранника на плоскость их граней. Рисовать сечения многогранников, перпендикулярные их рёбрам. Вычислять длины отрезков. Находить границы изменения величин. Планировать нахождение

			различных длин. Исследовать возможности получения результата при варьировании данных
8	Перпендикулярность плоскостей	4	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Доказывать свойства и признаки перпендикулярных плоскостей. Доказывать признак перпендикулярности прямой и плоскости, основанный на перпендикулярности плоскостей. Рисовать сечения многогранников, перпендикулярные его граням. Мысленно оперировать пространственными образами. Планировать нахождение различных длин. Доказывать утверждения, вытекающие из перпендикулярности плоскостей. Находить величины и их границы. Исследовать возможности получения результата при варьировании данных. Рассуждать о фактах геометрии. Оценивать полученные знания и результаты деятельности
9	Параллельные плоскости	5	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Строить плоскость, параллельную данной плоскости и проходящую через данную точку. Доказывать новые свойства и признаки взаимного расположения фигур, использующие параллельность плоскостей. Рисовать сечения многогранников, параллельных некоторой плоскости. Рисовать сечения многогранников, используя при изображении свойства параллельных плоскостей. Планировать нахождение различных длин. Исследовать возможности получения результата при варьировании данных. Практически

			применять полученные знания. Оценивать полученные знания и результаты деятельности
10	Параллельность прямой и плоскости	3	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Доказывать признак параллельности прямой и плоскости, а также и признак параллельности плоскостей, основанный на параллельности прямой и плоскости. Доказывать разнообразные признаки параллельности прямой и плоскости. Рисовать сечения многогранников, пользуясь свойством прямой, параллельной плоскости. Мысленно оперировать пространственными образами. Планировать вычисления величин. Находить границы величин. Исследовать возможности получения результата при варьировании данных. Практически применять полученные знания. Оценивать полученные знания и результаты деятельности
11	Ортогональное проектирование	1	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Рисовать ортогональную проекцию точки и отрезка на прямую. Рисовать ортогональную проекцию на плоскость и на прямую различных фигур, являющихся элементами многогранников. Мысленно оперировать пространственными образами. Находить границы величин. Доказывать утверждения, основанные на ортогональном проектировании. Исследовать возможности получения результата при варьировании данных. Самостоятельно изучить метод Монжа. Оценивать полученные знания и результаты деятель-

			ности. Уметь находить в Интернете сведения о «невозможных фигурах»
	Решение задач	2	
	Контрольная работа № 2	1	
20	Вернёмся к планиметрии п. 20.2. Теоремы Чевы и Менелая п. 20.5. Геометрические места точек	 2 2	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Планировать, вычисляя величины и делая построения фигур. Доказывать утверждения по всему курсу планиметрии. Вычислять величины и отношения величин. Исследовать возможности получения результата при варьировании данных. Строить фигуры с заданными свойствами
Глава III. Расстояния и углы		**20**	
12	Расстояние между фигурами	6	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Находить множества точек, отвечающих условию на расстояние. Мысленно оперировать пространственными образами. Рисовать перпендикуляры из точки на плоскость. Находить ближайшие точки. Планировать нахождение расстояний в разнообразных фигурах. Вычислять расстояния. Находить границы расстояний. Доказывать утверждения, основанные на понятии расстояния. Исследовать возможности получения результата при варьировании данных. Практически применять полученные знания. Оценивать полученные знания и результаты деятельности. Уметь находить в Интернете понятия, связанные с термином «расстояние»
13	Пространственная		Уметь работать с учебником (зада-

	теорема Пифагора	2	вать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать решение приведённых задач. Доказывание пространственной теоремы Пифагора, соотношения между тремя косинусами. Вычислять расстояния. Находить границы расстояний. Исследовать возможности получения результата при варьировании данных. Оценивать полученные знания и результаты деятельности. Уметь находить в Интернете сведения о Пифагоре и его теореме
14	Углы. Дополнение к § 14	8	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Доказывать транзитивность сонаправленности лучей, теоремы о равенстве углов с сонаправленными сторонами, характерное свойство биссектора двугранного угла. Мысленно оперировать пространственными образами. Находить угол между прямой и плоскостью как решение задачи на минимум, находить двугранный угол как решение задачи на минимум. Вычислять угол между прямыми в пространстве и угол между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями. Находить границы для углов. Использовать нормаль к плоскости для вычисления углов. Строить прямые и плоскости, образующие заданный угол. Исследовать возможности получения результата при варьировании данных. Практически применять полученные знания. Самостоятельное изучить трёхгранные углы. Оценивать полученные знания и результаты деятельности. Уметь находить в Интернете тематики, связанные с понятием «угол»
	Решение задач	3	

	Контрольная работа № 3	1	
Глава IV. Пространственные и плоские фигуры и тела		**30**	
15	Сфера и шар. Дополнение к § 15	6	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Доказывать свойства сферы и шара, теоремы о пересечении шара и плоскости и о касательной плоскости к сфере. Использовать аналогии между окружностью и сферой (кругом и шаром) для выдвижения гипотез о свойствах сферы (шара). Доказывать симметрии сферы и шара. Рассматривать вопрос о вписанных сферах и описанных сферах. Доказывать различные утверждения о сфере. Планировать нахождение величин. Находить величины и их границы. Исследовать возможности получения результата при варьировании данных. Практически применять полученные знания. Самостоятельно изучить сферические треугольники. Оценивать полученные знания и результаты деятельности. Уметь находить в Интернете примеры использования шара (сферы) в науке, технике, искусстве, быту
16	Опорная плоскость. Выпуклые фигуры	2	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Ознакомиться с понятиями опорной прямой и опорной плоскости, диаметром фигуры, шириной фигуры, выпуклостью фигуры. Доказывать свойства выпуклой фигуры. Самостоятельно изучить свойства плоскости, проходящей через конец диаметра фи-

			гуры и ему перпендикулярной. Рисовать фигуры с заданными свойствами. Мысленно оперировать пространственными образами. Исследовать возможность получения результата при варьировании данных
17	Цилиндры. Дополнение к § 17	4	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Строить цилиндр с произвольным основанием. Доказывать свойства цилиндра. Ознакомиться с выпуклым цилиндром, цилиндром вращения, симметрией цилиндра вращения. Доказывать свойства цилиндра, обусловленные видом его основания. Рассматривать различные случаи расположения опорных плоскостей к цилиндру. Уметь выяснять возможность вписания сферы в цилиндр и описания сферы около цилиндра. Рисовать фигуры с заданными свойствами. Мысленно оперировать пространственными образами. Исследовать возможности получения результата при варьировании данных. Вычислять величины и их границы. Практически применять полученные знания. Самостоятельное изучить эллипс как сечение цилиндра вращения. Оценивать полученные знания и результаты деятельности. Уметь находить в Интернете примеры использования цилиндра в науке, технике, искусстве и быту
18	Конусы. Усечённые конусы. Дополнение к § 18	7	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Строить конус с произвольным основанием. Доказывать свойства конуса. Ознакомиться с выпуклым кону-

			сом, конусом вращения, симметрией конуса вращения, усечённым конусом. Доказывать свойства конуса, обусловленные видом его основания. Рассмотреть различные случаи расположения опорных плоскостей к конусу. Уметь выяснять возможность вписания сферы в конус и описания сферы около конуса. Рисовать фигуры с заданными свойствами. Мысленно оперировать пространственными образами. Планировать нахождение величин. Уметь находить величины и их границы. Исследовать возможности получения результата при варьировании данных. Практически применять полученные знания. Самостоятельно изучить конические сечения и центральное проектирование. Уметь находить в Интернете примеры использования конуса в науке, технике, искусстве и быту. Уметь находить в Интернете сведения об Аполлонии Пергском
19	Тела	1	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Мысленно оперировать пространственными образами. Находить величины. Исследовать возможность получения результата при варьировании данных. Самостоятельно изучить свойства границы и выпуклых тел. Оценивать полученные знания и результаты деятельности
20	Вернёмся к планиметрии п. 20.3. Геометрия окружности п. 20.4. Вписанные и описанные четырёхугольники	 2 2	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Планировать при вычислении величин и построении фигур. Доказывать утверждения по всему курсу пла-

	п. 20.6. Решение задач с помощью геометрических преобразований	2	ниметрии. Вычислять величины и отношения величин. Находить границы величин. Исследовать возможности получения результата при варьировании данных. Строить фигуры с заданными свойствами
	Решение задач	3	
	Контрольная работа № 4	1	
Резерв		5	
Всего		**102**	
11 класс			
Глава V. Многогранники		**22**	
21	Многогранник и его элементы	3	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Рисовать многогранники с заданными свойствами. Восстанавливать общего вида многогранник по трём его проекциям. Мысленно оперировать пространственными образами. Оценивать полученные знания и результаты деятельности. Уметь находить в Интернете примеры использования многогранников в науке, технике, искусстве и быту
22	Призмы	3	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Мысленно оперировать пространственными образами. Планировать при вычислении величин и построении фигур. Находить границы величин. Исследовать возможность получения результата при варьировании данных. Оценивать полученные знаний и результаты деятельности. Уметь находить в Интернете примеры использования призм в науке, технике, искусстве и быту
23	Пирамиды	5	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания,

			комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Доказывать свойства правильной пирамиды. Доказывать свойства усечённой пирамиды. Мысленно оперировать пространственными образами. Вычислять величины. Находить границы величин. Исследовать возможности получения результата при варьировании данных. Практически применять полученные знания. Оценивать полученные знания и результаты деятельности. Уметь находить в Интернете примеры использования пирамид в науке, технике, искусстве и быту
24	Выпуклые многогранники	2	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Рисовать выпуклые многогранники с заданными свойствами. Уметь восстанавливать общего вида выпуклый многогранник по двум его проекциям. Доказывать свойства выпуклого многогранника. Исследовать возможности получения результата при варьировании данных. Самостоятельно изучить понятие выпуклой оболочки. Оценивать полученные знания и результаты деятельности. Уметь находить в Интернете сведения об О. Коши, А. Д. Александрове
25	Теорема Эйлера	2	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Рисовать выпуклые многогранники с разной эйлеровой характеристикой. Исследовать возможности получения результата при варьировании данных. Самостоятельно изучить развёртки выпуклого многогранника. Оценивать полученные знания и

			результаты деятельности. Уметь находить в Интернете сведения о Л. Эйлере
26	Правильные и полуправильные многогранники	3	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Доказывать свойства правильных многогранников. Планировать построение правильных многогранников на поверхностях других правильных многогранников. Исследовать возможность получения результата при варьировании данных. Практически применять полученные знания. Оценивать полученные знания и результаты деятельности. Уметь находить в Интернете примеры использования правильных многогранников в науке, технике, искусстве и быту. Уметь находить в Интернете сведения об Архимеде, И. Кеплере
	Решение задач	3	
	Контрольная работа № 5	1	
Глава VI. Объёмы		**12**	
27	Определение площади и объёма	1	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Оценивать полученные знаний
28	Объём прямого цилиндра	2	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Мысленно оперировать пространственными образами. Планировать вычисление объёма. Находить границы объёма. Практически применять полученные знания. Оценивать полученные знания и результаты
29	Представление объёма интегралом	1	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать при-

			ведённое решение задачи. Доказывать принцип Кавальери и формулу Симпсона. Вычислять объём тела. Практически применять полученные знания. Оценивать полученные знания и результаты. Уметь находить в Интернете способы вычисления объёмов без использования интеграла (Архимед, Кавальери, Кеплер). Уметь находить в Интернете сведения о Б. Кавальери
30	Объёмы некоторых тел	6	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Доказывать формулы для вычисления объёма с использованием интеграла или из других соображений. Планировать вычисление объёма. Вычислять объём. Находить границы объёма. Исследовать возможность получения результата при варьировании данных. Практически применять полученные знания. Рассуждать о фактах геометрии. Самостоятельно изучить связи равновеликости и равносоставленности в зависимости от размерности. Оценивать полученные знания и результаты. Уметь находить в Интернете сведения о Д. Гильберте
	Решение задач	1	
	Контрольная работа № 6	1	
Глава VII. Поверхности		**12**	
31	Геометрия на поверхности	2	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Оценивать полученные знания. Уметь находить в Интернете сведения о К. Гауссе, А. Погорелове, А. Мёбиусе
32	Площадь поверхности	6	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать при-

			ведённое решение задачи. Доказывать новые формулы для вычисления площадей поверхностей. Планировать вычисление площадей поверхностей. Вычислять площади поверхности. Находить границы площади поверхности. Исследовать возможности получения результата при варьировании данных. Практически применять полученные знания. Рассуждать о фактах геометрии. Самостоятельно ознакомиться с цилиндром Шварца. Оценивать полученные знания и результаты. Уметь находить в Интернете сведения о Г. Минковском
33	Сферическая геометрия	2	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Планировать вычисления величин, определённых на сфере. Доказывать утверждения сферической геометрии. Исследовать возможности получения результата при варьировании данных. Практически применять полученные знания. Самостоятельно ознакомиться с неравенством треугольника на сфере. Оценивать полученные знания и результаты. Уметь находить в Интернете сведения о сферической геометрии и тригонометрии. Уметь находить в Интернете сведения о Птолемее
	Решение задач	1	
	Контрольная работа № 7	1	
Глава VIII. Векторы и координаты		**21**	
34	Векторы	6	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Рисовать векторы, связанные с их расположением в многограннике. Мысленно оперировать пространственны-

			ми образами. Доказывать соотношения между векторами. Исследовать возможность получения результата при варьировании данных. Оценивать полученные знания и результаты
35, 36	Разложение вектора на составляющие. Векторное умножение векторов	3	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Доказывать векторные характеристики геометрических объектов. Доказывание соотношения в фигурах векторным способом. Самостоятельно ознакомиться с центром масс и выпуклой оболочкой. Рисовать векторы, связанные с их расположением в многограннике. Планировать нахождение координат вектора при условии связи между векторами. Вычислять геометрические величины векторным способом. Исследовать возможность получения результата при варьировании данных. Рассуждать о фактах геометрии. Оценивать полученные знания и результаты
37	Координаты	8	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Вычислять (находить) координаты точки, координатные задания фигур, величин. Мысленно оперировать пространственными образами. Находить следствия из формул, доказывать соотношения между фигурами с помощью координат. Исследовать возможность получения результата при варьировании данных. Рассуждать о фактах геометрии. Самостоятельно познакомиться с другими системами координат, с параметрическими уравнениями прямой и плоскости, с

			уравнениями прямой и плоскости в аффинных координатах. Оценивать полученные знания и результаты. Уметь находить в Интернете сведения о Р. Декарте, об использовании координат в науке и технике
	Решение задач	3	
	Контрольная работа № 8	1	
Глава IX. Движения		**14**	
38	Движения и их общие свойства	2	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Доказывать инварианты движения. Мысленно оперировать пространственными образами. Исследовать возможность получения результата при варьировании данных. Рассуждать о фактах геометрии. Оценивать полученные знания и результаты
39	Частные виды движений пространства	4	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Доказывать свойства движений. Доказывать свойства фигур посредством движения. Рисовать образы фигур, полученные в результате движения. Рисовать фигуры, обладающие симметриями. Мысленно оперировать пространственными образами. Планировать нахождение величин. Вычислять величины. Исследовать возможности получения результата при варьировании данных. Практически применять полученные знания. Рассуждать о фактах геометрии. Оценивать полученные знания и результаты
40	Теоремы о задании движений пространства	2	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Мысленно оперировать пространственными образами. Исследовать возможности получе-

			ния результата при варьировании данных. Оценивать полученные знания и результаты
41	Классификация движений	2	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Анализировать приведённое решение задачи. Рисовать фигуры, полученные в результате движения. Самостоятельно изучить винтовую линию. Мысленно оперировать пространственными образами. Доказывать свойства фигур, используя движение. Исследовать возможности получения результата при варьировании данных. Практически применять полученные знания. Оценивать полученные знания и результаты
42	Симметрия	3	Уметь работать с учебником (задавать вопросы, делать замечания, комментарии). Мысленно оперировать пространственными образами. Исследовать возможности получения результата при варьировании данных. Рассуждать о фактах геометрии. Оценивать полученные знаний. Уметь находить в Интернете сведения о симметрии. Уметь находить в Интернете сведения о Г. Вейле
	Контрольная работа № 9	1	
Глава X. Современная геометрия и теория относительности		**2**	Иметь общее представление о различных геометриях и развитии геометрии на протяжении веков.
Итоговое повторение		11	
Резерв		8	
Всего		**102**	

Учебно-методический комплект

1. *Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И.* Геометрия. 10 класс.
2. *Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И.* Геометрия. 11 класс.
3. Рыжик В.И. Геометрия. Дидактические материалы.

<u>Дополнительная литература</u>

1. *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Стереометрия. Ч. 2 / Ж. Адамар. — М.: Учпедгиз, 1951. Смотрите также в Интернете по адресу: libriz.net/.../72853-elementarnaya-geometriya-stereometriya.html
2. *Александров А. Д.* Стереометрия / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — Висагинас: Alfa, 1998.
3. *Анрах Дж. Тимоти*. Удивительные фигуры / Анрах Дж. Тимоти. — М.: АСТ, Астрель, 2002.
4. *Баврин И. И.* Новые задачи по стереометрии / И. И. Баврин, В. А. Садчиков. — М.: Владос, 2000.
5. *Вейль Г.* Симметрия. — М.: Наука, 1968. Смотрите также в Интернете по адресу: ilib.mccme.ru/djvu/weyl-symmetry.htm
6. *Веннинджер М.* Модели многогранников / М. Веннинджер. — М.: Мир, 1974.
7. *Виленкин Н. Я.* За страницами учебника математики / Н. Я. Виленкин, Л. П. Шибасов, З. Ф. Шибасова. — М.: Просвещение, 1996.
8. *Волошинов А. В.* Математика и искусство / А. В. Волошинов. — М.: Просвещение, 2000.
9. *Гильберт Д.* Наглядная геометрия / Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен. — М.: Наука, 1981. Смотрите также в Интернете по адресу: www.bookshunt.ru/b43943_naglyadnaya_geometriya
10. *Готман Э. Г.* Стереометрические задачи и методы их решения / Э. Г. Готман. — М.: МЦНМО, 2006.

11. *Делоне Б. Н.* Задачник по геометрии / Б. Н. Делоне, О. К. Житомирский. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
12. Журнал «Квант». Смотрите также в Интернете по адресу: http://kvant.mirror1.mccme.ru/
13. *Иванов С. Г.* Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика» / С. Г. Иванов, В. И. Рыжик. — М.: Просвещение, 2013.
14. *Костицын В. Н.* Моделирование на уроках геометрии / В. Н. Костицын. — М.: Экзамен, 2004.
15. *Костицын В. Н.* Практические занятия по стереометрии / В. Н. Костицын. — М.: Экзамен, 2007.
16. *Кушнир И. А*. Треугольник и тетраэдр в задачах / И. А. Кушнир. — Киев: Факт, 2004.
17. *Литвиненко В. Н.* Задачи на развитие пространственных представлений / В. Н. Литвиненко. — М.: Просвещение, 1991.
18. *Литвиненко В. Н.* Многогранники / В. Н. Литвиненко. — М.: Вита-Пресс, 1995.
19. *Литвиненко В. Н.* Сборник задач по стереометрии / В. Н. Литвиненко. — М.: Просвещение, 1998.
20. *Литвиненко В. Н.* Сборник типовых задач по геометрии. 10—11 / В. Н. Литвиненко. — М.: Просвещение, 1999.
21. *Лурье М. В.* Геометрия. Техника решения задач / М. В. Лурье. — М.: УНЦ ДО: Физматлит, 2002.
22. Смотрите сайт «Математические этюды» в Интернете по адресу: http://www.etudes.ru/
23. *Перельман Я. И.* Занимательная алгебра. Занимательная геометрия / Я. И. Перельман. — М.: АСТ, Астрель, 2002.
24. *Петров В. А.* Математика. Прикладные задачи / В. А. Петров — М.: Дрофа, 2010.
25. *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия / Я. П. Понарин. — М.: МЦНМО, 2006 — Т. 2.
26. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии / В. В. Прасолов. — М.: МЦНМО, 2007.

27. *Прасолов В. В.* Задачи по стереометрии / В. В. Прасолов. — М.: МЦНМО, 2010.
28. *Рутерсвард О.* Невозможные фигуры / О. Рутерсвард. — М.: Стройиздат, 1990.
29. *Севрюков П. Ф.* Векторы и координаты в решении задач школьного курса стереометрии / П. Ф. Севрюков, А. Н. Смоляков. — М.; Ставрополь: Илекса, 2008.
30. *Смирнова И. М.* В мире многогранников / И. М. Смирнова. — М.: Просвещение, 1995.
31. *Шестаков С. А.* Векторы на экзаменах / С. А. Шестаков. — М.: МЦНМО, 2005.
32. *Яковлев Г. Н.* Геометрия / Г. Н. Яковлев. — Висагинас: Alfa, 1998.